ležišta u koja dolaze zaoštreni vrhovi nosača (6). Kada se ovo klatno izvede iz ravnotežnog položaja i pusti, počeće da osciluje oko ose OO' koja prolazi kroz vrhove datog nosača.

Postupak u radu je sledeći:

- Reverziono klatno, kod koga su maksimalno razmaknuti i fiksirani nosači, postavi se na stativ. Pomoću zavrtnjeva na dnu stativa podesi se vertikalnost klatna. Zatim se klatno izvede iz ravnotežnog položaja za neki mali ugao i pusti da osciluje. Hronometrom se izmeri period oscilovanja T (iz vremena trajanja više oscilacija, npr. 20). Ovo treba ponoviti bar tri puta i uzeti srednju vrednost.

- Zatim se klatno okrene i postavi na drugi nosač. Pomeranjem jednog od nosača klatna (uvek jednog te istog) treba naći takav položaj pri kome će period klatna, kada je postavljeno na prvi, odnosno drugi nosač, biti jednaki. U tom slučaju rastojanje izmedju zaoštrenih vrhova jednog i vrhova drugog nosača predstavlja redukovanu dužinu fizičkog klatna l_0 koja se izmeri metrom. Zbog ograničene osetljivosti datog fizičkog klatna, mala promena redukovane dučine neće izazvati merljivu promenu perioda oscilovanja. Zato, da bi se našla najpribližnija vrednost redukovane dužine, pošto se nadje položaj nosača pri kome se dobija isti T kao u prvom slučaju, treba pomeriti jedan od nosača najpre ka većim, a zatim ka manjim vrednostima ovog rastojanja sve dok se period oscilovanja klatna, u granicama greške sa kojom se odredjuje period oscilovanja, na menja. Najverovatnija vrednost će biti na sredini maksimalne i minimalne vrednosti redukovane dužine

$$l_0 = \frac{1}{2}(l_{0\max} + l_{0\min}) \tag{5.17}$$

  Važno je da se svaki put kada se promeni nosač (uvek isti) prekontrolišu periodi oscilovanja za oba položaja nosača.

- Zamenom ovako određene redukovane dužine fizičkog klatna l_0 i odgovarajućeg perioda oscilovanja T, u $g = 4\pi^2\frac{l_0}{T}$ moguće je izračunati ubrzanje zemljine teže.

- Relativna greška koja se tom prilikom čini, računa se po obrascu

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l_0}{l_0} + 2\frac{\Delta T}{T} \tag{5.18}$$

6

ODREĐIVANJE MOMENTA INERCIJE TELA

Moment inercije J je fizička veličina kojom se kvantitativno opisuje inertnost tela pri obrtnom kretanju pa pretstavlja analogon masi kod translatornog kretanja.

Moment inercije materijalne tačke mase m na rastojanju r od ose obrtanja, dat je izrazom

$$J = mr^2$$

a za telo konačnih dimenzija jednak je zbiru momenata inercije svih elementarnih delića

$$J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2$$

tj.

$$J = \int r^2 dm = \rho \int_v r^2 dv \tag{6.1}$$

gde se integracija vrši po čitavoj zapremini.

Moment inercije je, kao i masa aditivna veličina, a to znači da je moment inercije sistema dva ili više tela, jednak zbiru momenta inercije tih tela.

Moment inercije tela iste mase će imati različite vrednosti zavisno od oblika tela, njegovih dimenzija kao i rasporeda mase u odnosu na osu za koju se momenat inercije određuje.

Kada je poznat moment inercije tela u odnosu na osu koja prolazi kroz njegov centar mase J_0, onda se pomoću Štajnerove teoreme može izračunati moment inercije J u odnosu na bilo koju drugu osu paralelnu osi koja prolazi kroz centar mase tela

$$J = J_0 + md^2 \tag{6.2}$$

gde je m - masa tela, a d rastojanje između osa.

Kod tela pravilnog geometrijskog oblika moment inercije u odnosu na bilo koju osu se može odrediti korišćenjem obrasca (6.1).

Kod tela nepravilnog geometrijskog oblika za određivanje momenta inercije se koriste eksperimentalne metode.

Jedna od metoda za eksperimentalno određivanje momenta inercije koristi vezu između perioda oscilovanja torzionog klatna i momenta inercije.

Telo, okačeno o vertikalno postavljenu žicu od elastičnog materijala, čija osa prolazi kroz težište tela, (sl. 6.1) može da osciluje u horizontalnoj ravni kada se telo obrne oko ose žice za mali ugao i pusti. Sistem koji ovako osciluje naziva se torzionim klatnom. Torzione oscilacije se vrše pod dejstvom momenata elastičnih sila koje nastaju pri uvrtanju žice i teže da vrate klatno u prvobitno stanje.

Period oscilovanja torzionog klatna dat je izrazom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}} \tag{6.3}$$

gde je J moment inercije tela u odnosu na osu ocilovanja, a C je torziona konstanta žice. Ova veličina karakteriše elastična svojstva žice u odnosu na uvrtanje, a predstavlja recipročnu vrednost modula torzije.

Veza koja postoji između T i J data obrascem (6.3) daje mogućnost da se odredi moment inercije tela nepravilnog oblika ako se od njega napravi torziono klatno, tj. pusti da osciluje u horizontalnoj ravni oko žice poznate torzione konstante i meri period oscilovanja ovih torzionih oscilacija.

Moment inercije tela se može odrediti merenjem perioda oscilovanja torzionog klatna i onda kada torziona kanstanta nije poznata, na način koji je opisan u daljem tekstu.

Postupak u radu

Varijanta I

Opis uređaja: Uređaj se sastoji iz mesingane šipke dužine L kroz čiju sredinu prolazi elastična metalna žica koja je na krajevima učvršćena (sl. 6.1). Sve to skupa predstavlja terziono klatno, jer ako se žica uvrne, nastaće torzione oscilacije. Uređaju pripada i par šupljih mesinganih valjaka istih dimenzija.

Moment inercije J_x datog torzionog klatna (koga treba odrediti) poveća se za iznose koji se tačno mogu izračunati, kada se na šipku simetrično učvrste dva ista šuplja valjka. Oni zajedno sa šipkom osciluju oko ose koja se poklapa sa osom žice. Povećanje momenta inercije sistema po Štajnerovom obrascu za ovaj slučaj iznasi $2(J_0 + md^2)$, pri čemu je J_0 moment inercije valjka u odnosu na sopstvenu osu koja prolazi kroz centar mase, a paralelna je osi oko koje osciluje ceo sistem, m je masa valjka, a d rastojanje među ovim osama. Prema obrascu (6.3) period oscilovanja celog sistema sada iznosi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_x + 2(J_0 + md^2)}{C}} \tag{6.4}$$

Kada se jednačina (6.4) digne na kvadrat i članovi na desnoj strani malo srede, dobija se

$$T^2 = \frac{8\pi^2 m}{C}d^2 + \frac{4\pi^2(J_x + 2J_0)}{C} \tag{6.5}$$

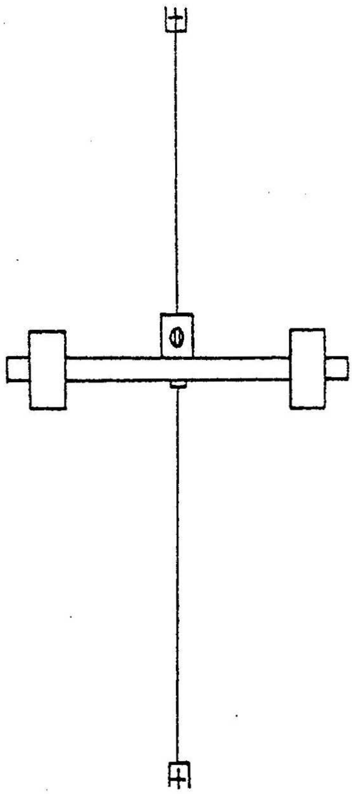
Vidi se da između kvadrata perioda oscilovanja T posmatranog torzionog klatna i kvadrata rastojanja d između pomenutih paralelnih osa postoji linearna zavisnost oblika $T^2 = ad^2 + b$, pošto su pri tom J_x, J_0 i m konstante. Koeficijent pravca $\underline{a}$ prave i njen otsečak na ordinatnoj osi $\underline{b}$ su dati izrazima:

$$a = \frac{8\pi^2 m}{C}; \quad b = \frac{4\pi^2(J_x + 2J_0)}{C} \tag{6.6}$$

Njihovim deljenjem i rešavanjem po J_x dobija se izraz

$$J_x = 2\left(\frac{b}{a}m - J_0\right) \tag{6.7}$$

koji se neposredno koristi za određivanje J_x. Kao što se vidi u ovom izrazu ne figuriše nepoznata torziona konstanta C, već samo vrednosti koje se mogu neposredno proračunati ili očitati sa snimljenog grafika.



Slika 6.1:

Prema tome, da bi se pomoću formle (6.7) odredio moment inercije J_x datog sistema potrebno je snimiti zavisnost T^2 od d^2. U svakom pojedinačnom merenju oba valjka treba postaviti na podjednaku udaljenost od ose sistema.

Postupak je sledeći:

1. Nonijusom se izmeri visina valjka H, njegov spoljašnji D_1 i unutrašnji dijametar D_2. Na vagi se izmeri masa m oba valjka, pa masu jednog valjka računati kao polovinu ove vrednosti.

2. Obračuna se moment inercije šupljeg valjka u odnosu na osu koja prolazi kroz njegov centar mase, a normalna je na njegovu visinu (ova osa je paralelna sa osom oko koje osciluje ceo sistem). Obračun J_0 se za ovaj slučaj vrši po obrascu:

$$J_0 = \frac{m}{16}\left\{D_1^2 + D_2^2 + 1,33H^2\right\}$$

3. Metrom se izmeri dužina L mesingane šipke (u cm).

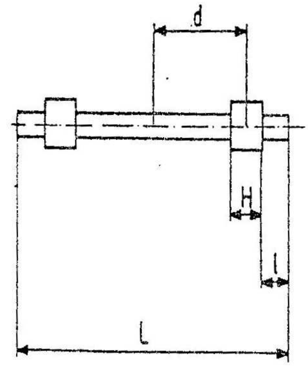
4. Zatim se oba valjka postavljaju simetrično na mesinganu šipku tj. tako da je svaki valjak podjednako udaljen od kraja šipke.

5. Rastojanje d određuje se tako što se nonijusom izmeri rastojanje l od kraja valjka do kraja šipke (slika 6.2) i koristi relacija:

$$d = \frac{L}{2} - l - \frac{H}{2} = L_0 - l \tag{6.8}$$

gde je

$$L_0 = \frac{L - H}{2}$$



Slika 6.2:

6. Za svako udaljenje d od valjka treba izmeriti period oscilovanja torzionog klatna iz vremena trajanja 10 oscilacija. Merenje vremena trajanja 10 oscilacija treba ponoviti 3 puta. Da bi se nacrtao grafik treba odrediti T bar za 6-8 različitih vrednosti za d.

7. Mereni podaci se sređuju u tabele na sledeći način

m (g)	D_1 (cm)	D_2 (cm)	H (cm)	$J_0 = \frac{m}{16}(D_1^2 + D_2^2 + 1,33H^2)$ $(grcm^2)$	L (cm)	$L_0 = \frac{L}{2} - \frac{H}{2}$ (cm)

$d = \frac{L}{2} - \frac{H}{2} - l$

N^o	l (cm)	$d = L_0 - l$ (cm)	d^2 (cm^2)	n	t_i (s)	$t = \sum \frac{t_i}{3}$ (s)	Δt (s)	$T = \frac{t}{n}$ (s)	$\Delta T = \frac{\Delta t}{n}$ (s)	T^2 (s^2)	$\Delta T^2 = 2T\Delta T$ (s^2)
1											

8. Pomoću ovih podataka nacrta se grafik $T^2 = f(d^2)$, sa koga se očitavaju vrednosti za koeficijent pravca $\underline{a}$ i otsečak $\underline{b}$ na ordinatnoj osi. Njihovom zamenom u formuli (6.7) dobija se J_x.

Može se pokazati da je vrednost b/a brojno jednaka otsečku k koji se dobija kada se dobijena ekperimentalna prava produži do njenog preseka sa apscisnom osom. Otuda se izraz (6.7) svodi na $J_x = 2(km - J_0)$. Vrednost za J_x izraziti u kgm^2.

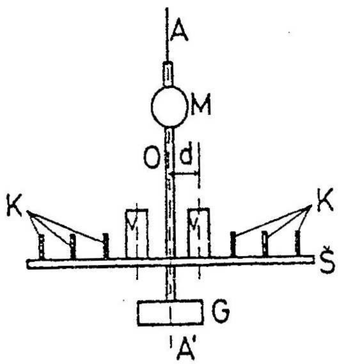
Apsolutna greška koja se čini ovakvim postupkom data je izrazom

$$\Delta J_x = 2(m\Delta k + k\Delta m + \Delta J_0) \tag{6.9}$$

pri čemu je

$$\Delta J_0 = J_0\left\{\frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta D(D_1 + D_2 + 1,33H)}{D_1^2 + D_2^2 + 1,33H^2}\right\} \quad (6.10)$$

gde je uzeto da je $\Delta D_1 = \Delta D_2 = \Delta H = \Delta D$ tačnost nonijusa, a Δm tačnost merenja mase sa korišćenom vagom. Kako se k određuje sa grafika, to je Δk dato vrednošću d^2 koja odgovara podeoku od jednog milimetra na grafiku.



Slika 6.3:

9. Merene rezultate treba obraditi i korišćenjem metode najmanjih kvadrata. Uzimajući da je $x_i = d_i^2$, a $y_1 = T_I^2$ treba izračunati parametre prave $\underline{a}$ i $\underline{b}$ i odgovarajuće greške za a i b, pa odgovarajuće vrednosti zameniti u izraze (6.7) i (6.9). Pri obračunu greške ΔJ_x treba uzeti da je

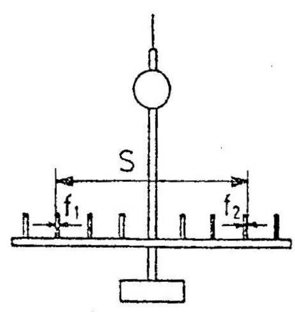
$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \quad (6.11)$$

Varijanta II

Opis uređaja: Sistem čiji moment inercije treba odrediti, sastoji se od horizontalne šipke it Š (slika 6.3) snabdevene nizom klinova k, kratke osovine O koja se nalazi na sredini šipke S i masivnog tega G pričvršćenog za donji kraj kratke osovine. Ceo ovaj sistem visi na donjem kraju žice čiji je gornji kraj pričvršćen. Sve to skupa predstavlja torziono klatno. Uz uređaj se dobija i par mesinganih valjaka istih dimenzija, koji na jednom bazisu imaju odgovarajuće šupljine tako da se mogu postaviti preko klinova K.

Metoda određivanja momenta inercije i u ovoj varijanti je ista kao i kod varijante I, tj. snima se zavisnost $T^2 = f(d^2)$. Rastojanje d se menja tako što se svaki put valjci postavljaju na različit simetrični par klinova. Valjci se postavljaju na klinove tako da je njihova visina paralelna osi sistema, a rastojanje d je normalno odstojanje težišta valjka od ose simetrije. Za taj slučaj $J_0 = mr^2/2$, gde je r poluprečnik bazisa valjka. Pri određivanju d postupak je sledeći: Nojijusom se izmeri rastojanje S između spoljnih strana dva simetrična klina, a zatim debljina f_1 i f_2 samih klinova. Tada se rastojanje d računa kao:

$$d = \frac{1}{2}\left\{S - \frac{f_1 + f_2}{2}\right\} \quad (*)$$



Slika 6.4:

U svemu ostalom postupak je isti kao i kod varijante I. Rezultati se sređuju u tabele na sledeći način:

$m(g)$	$r(cm)$	$J_0 = \frac{1}{2}mr^2$	$f_1(cm)$	$f_2(cm)$	$f_1 + f_2(cm)$

N^o	S (cm)	$d(*)$	d^2 (cm^2)	n	t_i (s)	$t = \frac{1}{3}\sum t_i$ (s)	Δt (s)	$T = \frac{t}{n}$ (l)	$\Delta T = \frac{\Delta t}{n}$ (s)	T^2 (s^2)	ΔT^2 (s^2)

Pri obračunu greške za J_x se uzima isti izraz kao u varijanti I, samo što je za ovaj slučaj:

$$\Delta J_0 = \frac{1}{2}r(r\Delta m + 2m\Delta r) \tag{6.12}$$

Slično, $\Delta T^2 = 2T\Delta T$.

7

PROUČAVANJE PRIGUŠENIH OSCILACIJA

Harmonijsko oscilatorno kretanje javlja se pod uticajem sile čija je veličina srazmerna udaljenju od ravnotežnog položaja i deluje prema ravnotežnom položaju tj. $F = -kx$, pa se može prikazati diferencijalnom jednačinom kretanja koja ima oblik

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{7.1}$$

u kojoj je k - koeficijent restitucione sile.

Rešenje ove diferencijalne jednačine dato je relaciojm

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{7.2}$$

i pokazuje kako se sa vremenom menja rastojanje materijalne tačke od ravnotežnog položaja kada ta tačka vrši harmonijsko kretanje. Parametri harmonijskog kretanja su konstantna amplituda A, početna faza φ_0 i ugaona učestanost $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

U odstustvu trenja, jedanput započeto ovakvo harmonijsko kretanje odvija se sa periodom sopstvenih oscilacija $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ i traje beskonačno dugo, zadržavajući stalnu vrednost amplitude.

Međutim, realno oscilatorno kretanje naizbežno je praćeno prisustvom sile trenja, tako da se umesto harmonijskog kretanja, praktično uvek radi o prigušenom (amortizovanom) harmonijskom kretanju.

Vodeći računa da je za slučaj kretanja u viskoznoj sredini sila otpora sredine (za manje brzine) srazmerna brzini materijalne tačke, $F_t = -rv$, gde je r - koeficijent otpora sredine, ovakvo kretanje opisuje se diferncijalnom jednačinom kretanja

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} \tag{7.3}$$

Rešenje ove jednačine ima oblik