

**UNIVERZITET U BEOGRADU - FIZIČKI FAKULTET**

# **Laboratorija fizike 1**

dr Djordje Spasojević

**Beograd, 2014.**



Djordje Spasojević  
LABORATORIJA FIZIKE 1

Recenzenti: Prof. dr Ivan Aničin i Prof. dr Srdjan Bukvić.

# Predgovor

Udžbenik Laboratorija fizike 1 sadrži opis i uputstva za izvodjenje studentskih eksperimenata u okviru predmeta Laboratorija fizike 1 koji prati nastavu iz oblasti fizičke mehanike. Namenjen je studentima I godine svih smerova fizike na Univerzitetu u Beogradu - Fizičkom fakultetu, kao i studentima drugih studijskih grupa koji rade iste eksperimente.

Eksperimenti se dominantno izvode na opremi doniranoj od strane Evropske unije u okviru IPA projekta "OPREMANJE STUDENTSKIH LABORATORIJA NA FIZIČKOM FAKULTETU UNIVERZITETA U BEOGRADU", realizovanog u jesen 2013. godine.

Tekst posvećen svakom eksperimentu započinje teorijskim uvodom i nastavlja se opisom aparature i uputstvima za njeno korišćenje. Sledi opis zadatka (cilja) eksperimenta i uputstvo za njegovu realizaciju. Od studenata se očekuje da u obradi eksperimentalnih rezultata i njihovoj prezentaciji primene znanja stečena na predmetu Obrada rezultata merenja. Stoga su detalji procene eksperimentalnih grešaka često izostavljeni. Uputstva za korišćenje pratećeg softvera su data u posebnom dokumentu.

Pri koncipiranju kursa nastojalo se da budu pokrivena najznačajnije teme iz fizičke mehanike. Svaki eksperiment je postavljen tako da ga je moguće uraditi u toku jednog termina. Opcioni zadaci su predviđeni za posebno zainteresovane studente i rade se u dodatnim terminima. Poglavlja označena zvezdicom sadrže teorijske detalje koje studenti I godine ne moraju da znaju, a dati su radi kompletnosti teksta; pri pripremi eksperimenta predlaže se da se ova poglavlja izostave.

Teme kursa, tip aparatura i eksperimentalne zadatke je izabrao predmetni nastavnik. U finalizaciji kursa značajan doprinos su dali studenti saradnici Jelena Pajović, Nora Trklja, Svetislav Mijatović i Petar Bokan, kao i stručni saradnici Miloš Marinković i Milorad Mijić. Posebno veliki doprinos je dao Edib Dobardžić, kao i Zoran Popović. Najveći doprinos prilagodjavanju i modifikaciji aparatura je dao Duško Grujić, na čemu mu se posebno zahvaljujem.

Djordje Spasojević  
predmetni nastavnik

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Instrumenti za merenje dužine i vremena</b>	<b>1</b>
1.1	Metarska traka	1
1.2	Lenjir sa nonijusom	6
	Nonijus sa satnom skalom	10
	Nonijus sa digitalnim očitavanjem	10
	Princip rada nonijusne skale*	12
1.3	Mikrometarski zavrtanj	13
	Princip rada mikrometra	14
	Očitavanje skale mikrometra	14
	Primer očitavanja mikrometra	15
	Rezultat pojedinačnog merenja mikrometrom	15
	Korekcija očitavanja mikrometra	16
	Digitalni mikrometar	17
1.4	Hronometar	18
	Mehanički hronometar	18
	Digitalni hronometar	19
	Greška refleksa i greška pojedinačnog merenja hronometrom	19
	Merenje perioda hronometrom	20
<b>2</b>	<b>Instrumenti za merenje mase</b>	<b>22</b>
2.1	Terazije	22
	Priprema terazija za rad	24
	Princip rada terazija - osnovna teorija	29
	Princip rada terazija - detaljnija teorija**	29
	Korekcija na nejednakost krakova terazija	32
2.2	Digitalna vaga	33
	Korekcija na potisak	35

<b>3</b>	<b>Merenje gustine čvrstih tela</b>	36
	3.1 Gustina	36
	3.2 Merenje gustine čvrstih tela piknometrom	37
<b>4</b>	<b>Matematičko klatno</b>	39
	4.1 Matematičko klatno	39
<b>5</b>	<b>Modul elastičnosti</b>	46
	5.1 Uvod	46
	5.2 Opis aparature	53
	5.3 Zadatak	54
	5.4 Dodatak	58
<b>6</b>	<b>Modul torzije</b>	62
	6.1 Uvod	62
	6.2 Opis aparature	68
	6.3 Eksperimentalna procedura	69
	Zadatak 1 - određivanje modula torzije	70
	Zadatak 2 - snimanje histerezisa žice pri njenom uvrtnanju	72
	Zadatak 3 - snimanje relaksacije žice	72
<b>7</b>	<b>Određjivanje ubrzanja Zemljine teže</b>	74
	7.1 Fizičko klatno	74
	Zavisnost kretanja od položaja ose klatna	76
	Merenje $g$ fizičkim klatnom	77
	7.2 Doprinos ostalih sila*	80
	7.3 Zadatak	83
<b>8</b>	<b>Oscilacije na strmoj ravni</b>	88
	8.1 Uvod	88
	8.2 Zadatak	93
<b>9</b>	<b>Prigušene i prinudne oscilacije</b>	95
	9.1 Linearni harmonijski oscilator	95
	9.2 Prigušene oscilacije	98
	9.3 Prinudne oscilacije	101
	Rezonanca	107
	9.4 Postavka eksperimenta	109

---

9.5	Zadatak 1 - proučavanje prigušenih oscilacija	110
9.6	Zadatak 2 - proučavanje prinudnih oscilacija	111

<b>10</b>	<b>Dinamika rotacije</b>	<b>115</b>
10.1	Uvod	115
10.2	Opis aparature	121
10.3	Ekperimentalna procedura	123
	Zadatak 1 - merenje ugaonog ubrzanja	123
	Zadatak 2 - određivanje momenta inercije sistema	125
	Zadatak 3 - određivanje momenta otpora vazduha $M_d$ u funkciji ugaone brzine $\omega$	127
	Zadatak 4 - provera zakona održanja energije	129
	Zadatak 5 - provera zakona održanja momenta impulsa (opciono)	130





# 1 Instrumenti za merenje dužine i vremena

---

## 1.1 Metarska traka

Metarska traka (*engl - measuring tape*) je jednostavan instrument za merenje dužine koji se koristi i u svakodnevnom životu. Metarske trake se prave od različitih materijala (metal, platno,...) u različitim opsezima (od 1m do preko 100m) i sa različitom podelom na skali. U laboratoriji će se koristiti metalne metarske trake kao na slici 1.1. Njihove osnovne karakteristike su:

- **merni opseg:** 2,000 m (ovo je gornja granica opsega, dok se donja granica 0,000 m podrazumeva, te se tipično i ne navodi)
- **najmanji podelak:** 1 mm
- **maksimalna greška izgradnje:** 0,5 mm
- **maksimalna greška očitavanja:** 0,5 mm
- **prosečna greška očitavanja:** 0,25 mm

### Merenje metarskom trakom

Iako je način merenja metarskom trakom poznat iz svakodnevnog života i/ili osnovne i srednje škole, ovde ga navodimo radi kompletnosti.

Metarsku traku je potrebno postaviti **paralelno** dužini koja se meri. Preporučuje se **prvi način merenja:** početak trake se postavi na početak merene dužine, pa se zatim očitava položaj kraja te dužine. Ovaj način je ilustrovan na slici 1.2(a). Ako prvi način nije moguć, onda se primenjuje **drugi način:** očitava se položaj početka  $p$  i kraja  $k$ , videti sliku 1.2(b), pa se dužina koja se meri izračunava kao  $l = k - p$ .

Očitava se najbliži celi podelak.

Ne procenjivati delove podeoka.



**Slika 1.1** Metarska traka. (1) je kočnica; njenim potiskivanjem ka metarskoj traci se traka fiksira u trenutnom položaju, a u suprotnom se oslobadja, tj može da se uvlači i izvlači.

### Apsolutna greška pojedinačnog merenja metarskom trakom

Najjednostavnija procena greške pojedinačnog merenja glasi:

**Apsolutna greška  $\Delta l = 1 \text{ mm},^a$**

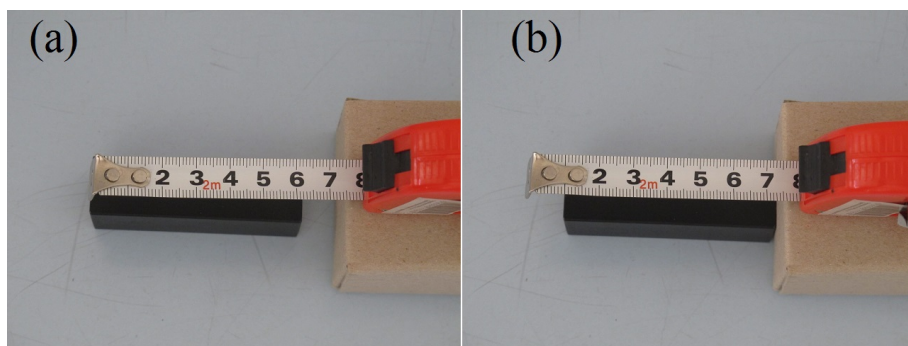
tj jednaka je vrednosti najmanjeg podeoka.

<sup>a</sup> Ovde je uzeto da se meri veličina  $l$ , npr neka dužina; da smo merili prečnik  $D$ , apsolutnu grešku bi označili sa  $\Delta D$ .

Diskusija:<sup>1</sup> Iako najjednostavnije, navedeno pravilo procene greške nije i jedino moguće. Metarska traka je namenjena za jednostavna i brza merenja bez korišćenja dodatnih pomagala za očitavanje, te greška (tj neodređenost) rezultata pojedinačnog merenja zavisi od više faktora.

Kao prvi navedimo **grešku izgradnje** zbog koje se ne sme smatrati da su podeoci na traci idealno naneti. Rastojanje izmedju susednih podelaka i debljina podelaka slučajno variraju, dok se na većim dužinama javlja i sistematsko odstupanje proporcionalno rastojanju (npr traka sistematski pokazuje 0,01% veće rastojanje ali ovo ne znamo, osim ako je traka kalibrisana što je retko). Medjutim, iako je metarska traka jeftin instrument pri čijoj izradi se (obično) ne primenjuju

<sup>1</sup> Može se preskočiti pri prvom upoznavanju, ali se preporučuje da se kasnije obradi.



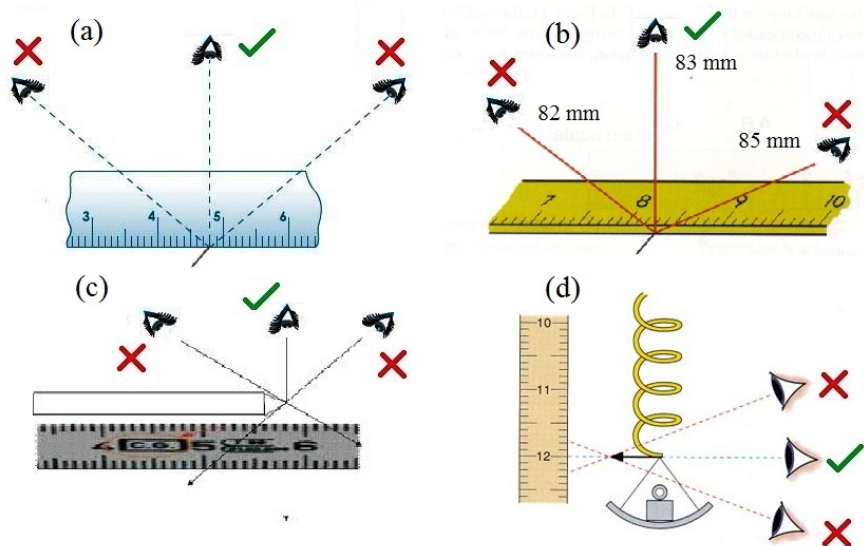
**Slika 1.2** Merenje dužine kvadra metarskom trakom. (a) - početak trake je postavljen na početak kvadra i potrebno je očitati položaj kraja kvadra (on se u ovom slučaju nalazi između 61 mm i 62 mm). Naglasimo da metarska traka nije dobro postavljena: ona nije paralelna dužini kvadra, a njen početak nije na početku kvadra već je nategnut na njega. Stoga je očitana dužina manja od prave dužine. (b) - početak kvadra se ne poklapa sa početkom metarske trake, već se nalazi na  $p = 10$  mm, dok se kraj kvadra nalazi između 72 mm i 73 mm, ali bliže ovom drugom, te uzimamo da je  $k = 73$  mm. Dužina kvadra je  $l = k - p = 63$  mm.

strogi metodi kontrole kvaliteta, savremene procedure njene izrade obezbeđuju da greška izgradnje ne prelazi vrednost od 0,5 mm na celom opsegu (osim za trake "sumnjivih" proizvođača).

Grešci pojedinačnog merenja doprinosi i **greška očitavanja**. Već smo rekli da rezultat merenja treba navesti kao ceo broj podelaka čak i kada smo u iskušenju da izvršimo vizuelnu procenu delova podelaka. Pri ovakvom "zaokruživanju" na najbliži celi podelak se pri **svakom očitavanju** može javiti greška manja od polovine najmanjeg podeoka, tj 0.5 mm. Grešku očitavanja treba zanemariti kada postoji poklapanje sa celim podeokom.

Pri očitavanju metarske trake (kao i bilo kog drugog instrumenta sa analognom skalom, npr ampermetra) linija posmatranja mora biti (što približnije) **normalna** na skalu instrumenta. U suprotnom dolazi do tzv **greške paralakse** ilustrovane na slici 1.3. Kada se očitavanje vrši sa metarske trake koja se nalazi neposredno uz objekat koji se meri greška paralakse je obično zanemariva.

Način na koji se merenje vrši je takodje potencijalni izvor grešaka. Tako npr ako metarska traka nije paralelna dimenziji koja se meri očitace se **veća** vrednost - vidi sliku 1.2, gde u slučaju (a) traka očigledno nije paralelna dužini kvadra, dok je u (b) metarska traka skoro paralelna. Metarska traka postavljena na



**Slika 1.3** Greška paralakse. (a) pravilan (✓) i dva nepravilna (✗) pravca posmatranja skale; nema greške paralakse jer se skala nalazi neposredno uz mereni objekat. (b) - iako je objekat uz skalu, greška paralakse se javlja zbog prelamanja svetlosti ako se posmatranje ne vrši normalno na skalu. (c) - iako je objekat uz skalu, javlja se greška paralakse kada se vrh olovke ne posmatra normalno na skalu. (d) - greška paralakse pri posmatranju na udaljenoj skali.

mereni objekat se savija na sredini, te i ovo savijanje dovodi do većeg rezultata očitavanja.

Metarska traka bi u idealnom slučaju trebalo da bude kalibrisana na nekoj temperaturi, tipično na  $20^{\circ}\text{C}$ . Zbog toplotnog širenja metarska traka pokazuje manju vrednost kada se koristi na višoj, a veću vrednost kada se koristi na nižoj temperaturi. Termalno širenje je tipičan primer sistematske greške koja se može korigovati. Korekcija ima smisla ako se meri na temperaturi koja se od kalibracione razlikuje za više od  $15^{\circ}\text{C}$ .

Navedimo da ponekad i merena dužina nije dovoljno oštro definisana što takodje predstavlja potencijalni izvor greške merenja.

Naglasimo i da postoji očigledna razlika da li se očitava položaj samo jednog ili oba kraja predmeta koji se meri jer u prvom slučaju imamo samo jednu, a u drugom dve potencijalne greške očitavanja. Kada imamo samo jedno očitavanje greška očitavanja implicitno zavisi od toga koliko dobro je početak poklopljen

sa nulom skale jer ovo poklapanje nikada nije idealno. Kada imamo očitavanje početka i kraja tada u najnepovoljnijoj situaciji (na oba kraja se "nalazimo" negde oko sredine podeoka) greške očitavanja treba sabrati linearno ( $\Delta l_o = \Delta l_{op} + \Delta l_{ok}$ ), dok je u ostalim situacijama opravdanije sabrati ove greške kvadratno ( $\Delta l_o = \sqrt{\Delta l_{op}^2 + \Delta l_{ok}^2}$ ).

Iz prethodnog (a našlo bi se još) se vidi da postoji više različitih izvora grešaka pri merenju metarskom trakom. Ove greške bi trebalo iskombinovati u jednu sveukupnu apsolutnu grešku koju navodimo kao grešku pojedinačnog merenja. Kombinovanje greške izgradnje  $\Delta l_g$  i greške očitavanja  $\Delta l_o$  se obično vrši kvadratno, tj

$$\sqrt{\Delta l_g^2 + \Delta l_o^2}$$

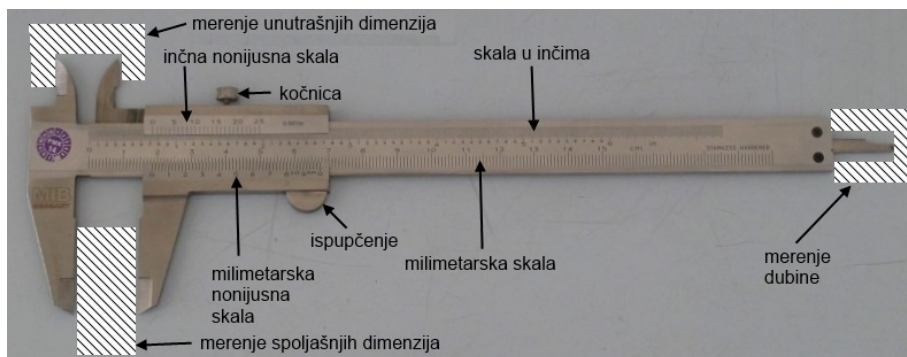
bi trebalo da bude njihov zajednički doprinos jer se smatra da su izvori ovih grešaka nezavisni; kako to nije uvek ispunjeno, kvadratno kombinovanje je tipičan, ali ne obavezan, način kombinovanja. Način kombinovanja ostalih grešaka je još zamršeniji i zavisi od sveukupnosti uslova merenja.

Kako nam nije cilj da od jednostavnog merenja metarskom trakom pravimo "novu naučnu disciplinu", nužna nam je neka jednostavna procena greške koja će relativno dobro pokrivati različite moguće situacije. To pravilo je, kako smo već naveli,  $\Delta l = 1$  mm. Sa druge strane iz diskusije ovog (verovatno najjednostavnijeg) primera merenja se vidi koliko je realni svet komplikovaniji od jednostavnih modela kojim ga opisujemo. Ta jednostavnost nije mana, već prednost našeg opisa, a komplikacije treba "vesti u igru" jedino ako je neophodno.

Na kraju diskusije navedimo da se često čuje da za grešku pojedinačnog merenja metarskom treba uzeti pola najmanjeg podeoka, tj 0,5 mm. Kako greška izgradnje često dostiže sličnu vrednost, ovakvu procenu autor teksta smatra optimističkom i zato predlaže pesimističniju procenu od 1 mm.

## 1.2 Lenjir sa nonijusom

Lenjir sa nonijusom, kratko - nonijus, (*engl. - Vernier Caliper*) je instrument sa mehaničkom konstrukcijom koji služi za merenje linearnih dimenzija sa greškom manjom od 1 mm. Na slici 1.4 je jedan tip lenjira sa nonijusom koji se koristi u studentskoj laboratoriji.



**Slika 1.4** Lenjir sa nonijusom; opseg: 0-200 mm. Na lenjiru su dve nepomične skale: donja - milimetarska i gornja - inčna (1 inch = 25,4 mm). Na pokretnom delu se nalaze dve nonijusne skale: donja - milimetarska sa 50 podelaka i gornja - inčna sa 25 podelaka; nulti podelak se ne broji. Spoljašnje dimenzije se mere pomoću donjih krakova nonijusa koji se spolja prislone na mereno telo, dok se unutrašnje dimenzije mere prislanjanjem gornjih krakova na unutrašnje zidove merene šupljine. Dubina se meri pomoću produžetka na desnom kraju instrumenta. Pokretni deo se pomera palcem oslonjenim na ispučenje, a fiksira kočnicom.

Lenjir sa nonijusom se koristi za merenje spoljašnjih dimenzija (dužina, prečnik,...), unutrašnjih dimenzija (unutrašnji prečnik,...) i dubine čvrstih tela - vidi objašnjenje na slici 1.4. Telo koje se meri se stisne (da ne bi merili debljinu sloja vazduha između krakova) i to toliko da se **ne deformiše**. O ovome je potrebno voditi računa jer lenjiri sa nonijusom **nemaju kontrolu sile pritiska**.

Lenjiri sa nonijusom se izrađuju od čelika, redje od tvrde plastike, sa opsegom od 150 mm pa do preko 1 m i tačnosti od 0,1 mm pa do 0,001 mm. Izrađuju se u metarskoj, inčnoj, kao i dvostrukoj (metarskoj i inčnoj) verziji. Imaju dve vrste skale: osnovnu skalu (za koju se kaže da je nepomična i koja služi za očitavanje celih podelaka) i pomičnu - nonijusnu skalu, koja služi za očitavanje delova podeoka. Temperatura na kojoj su urezani podeoci, kao i ostali kalibracioni podaci su obično na zadnjoj strani instrumenta.

Lenjiri sa nonijusom kao na slici 1.4 imaju dve osnovne skale: donju - milime-

tarsku i gornju - inčnu. Takodje imaju i dve nonijusne skale: donju za milimetarsku i gornju za inčnu osnovnu skalu. Dalje ćemo govoriti samo o merenjima na milimetarskoj skali.

Očitavanje izmerene vrednosti se vrši uz pomoć osnovne i nonijusne skale. Milimetarska skala služi za očitavanje celog broja milimetara, tj daje celobrojni deo očitavanja, a nonijusna za očitavanje delova milimetra, tj daje decimalni deo očitavanja. Koristiti pravila: .

1. **Celobrojni deo** očitavanja je **dat najvećim podeokom osnovne skale** koji se nalazi **ispred nule nonijusne skale**.
2. Cela nonijusna skala "vredi" 1 mm, a vrednost njenog najmanjeg podeoka u milimetrima iznosi

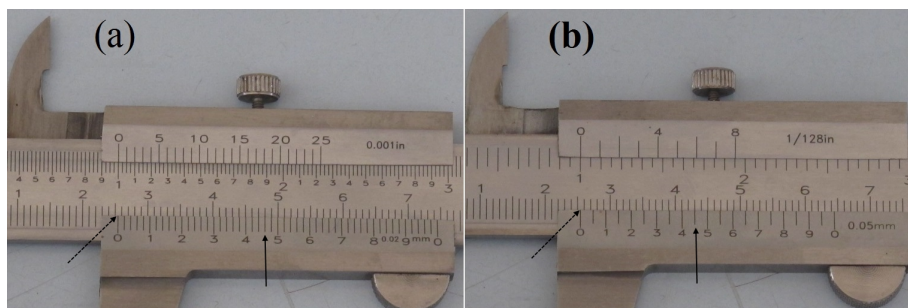
$$\tau = 1/N ,$$

gde je  $N$  broj podelaka na nonijusnoj skali.<sup>a</sup> Ova vrednost se uzima za **tačnost nonijusa** i (obično) navodi na osnovnoj skali.

3. *Poklopljeni* podelak je podelak nonijusne skale koji se najbolje poklapa sa nekim podeokom osnovne skale; ako se dva podeoka najbolje poklapaju, za poklopljeni podelak uzimamo manji.
4. **Decimalni deo** očitavanja se dobija tako što:
  - sračunamo  $n\tau = n/N$ , gde je  $n$  redni broj poklopljenog podeoka nonijusne skale,
  - ili
  - odredimo linearnom interpolacijom položaj poklopljenog podeoka na nonijusnoj skali znajući da cela skala vredí 1 mm, a da oznake na nonijusnoj skali pokazuju desete delove milimetra.

<sup>a</sup> Instrument sa slike 1.4 ima  $N = 50$  podelaka, te je za njega  $\tau = 0,02$  mm; prave dužine njegove nonijusne skale i njenih podelaka su 49 mm i 0,98 mm, respektívno.

Primeri očitavanja za dva nonijusa sa 50 i 20 podelaka su dati na slikama 1.5, respektívno.



**Slika 1.5** Primer očitavanja lenjira sa nonijusom; meren je kvadar širine  $l \sim 1$  inch.

(a) - instrument sa  $N = 50$  podelaka i tačnošću  $\tau = (1/50)$  mm = 0,02 mm,

(b) - instrument sa  $N = 20$  podelaka i tačnošću  $\tau = (1/20)$  mm = 0,05 mm.

Primetiti da su tačnosti navedene na nonijusnoj skali.

**Očitavanje celobrojnog dela:** kose strelice pokazuju da se nula nonijusne skale nalazi između 25-og i 26-og podeoka osnovne milimetarske skale te celobrojni deo očitavanja iznosi 25.

**Očitavanje decimalnog dela:** uspravne strelice pokazuju *poklopljeni podelak*, tj podelak nonijusne skale koji se (najbolje) poklapa sa (nekim) podeokom osnovne skale. Kako se vidi da se nula nonijusne skale nalazi oko sredine između 25-og i 26-og milimetra poklopljeni podelak treba potražiti negde oko sredine nonijusne skale. U primeru (b) on se lako nalazi - to je podelak između oznaka 4 i 5 čiji je redni broj  $n = 9$ . Interpolacijom se lako nalazi da on odgovara vrednosti 0,45 mm, što se može i sračunati:  $n\tau = 9 \times 0,05$  mm = 0,45 mm. Uočite da se 9-ti podelak bolje poklapa od 8-og (podelak osnovne skale iznad njega je malo sleva) i od 10-og (podelak osnovne skale iznad njega je malo sdesna). Nalaženje poklopljenog podeoka u primeru (a) je nešto "osetljivije"; i ovde se vidi da podelak sa oznakom 4 malo "prednjači", a onaj sa oznakom 5 malo "kasni", te se poklopljeni podelak nalazi negde između njih.

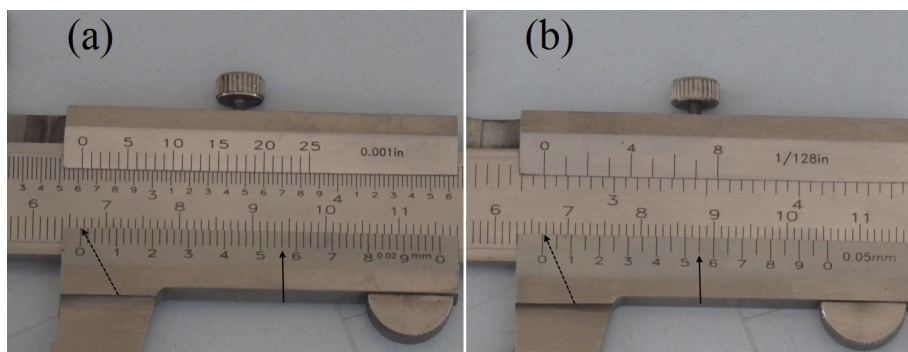
Procenjujemo da se najbolje poklapa 3-ći međupodelak; interpolacijom lako nalazimo da on odgovara vrednosti 0,46 mm, što se može i sračunati obzirom da je njegov redni broj  $n = 23$ , a tačnost ovog instrumenta  $\tau = 0,02$  mm.

**Konačni rezultat očitavanja:**

(a)  $l = (25,46 \pm 0,02)$  mm,

(b)  $l = (25,45 \pm 0,05)$  mm.





**Slika 1.6** Primer br. 2 očitavanja lenjira sa nonijusom; oznake i instrumenti su isti kao na prethodnoj slici.

**Konačni rezultat očitavanja:**

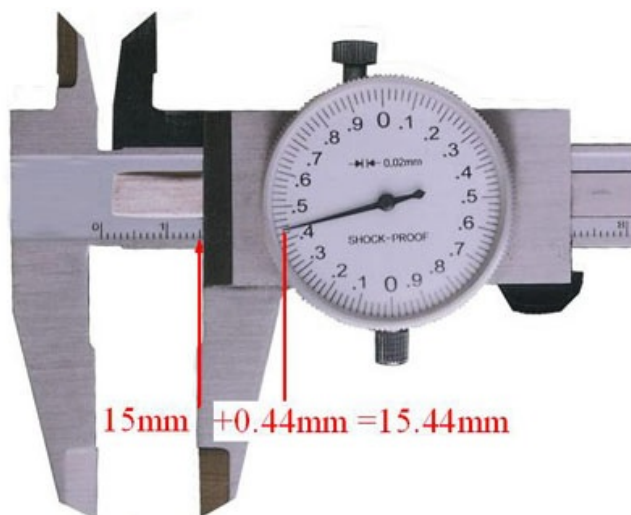
(a)  $l = (66,58 \pm 0,02)$  mm,

(b)  $l = (66,55 \pm 0,05)$  mm.

Iz navedenih primera se vidi da se povećanjem broja podelaka smanjuje greška merenja ali i smanjuje pouzdanost očitavanja (jer se sve teže određuje poklopljeni podelak). Zbog toga preterano povećanje broja podelaka radi povećanja tačnosti gubi smisao. Umesto toga, nonijusi se opremaju pomagalima za povećanje čitljivostii o čemu govorimo u nastavku teksta.

### Nonijus sa satnom skalom

Kod lenjira sa nonijusom prikazanim u prethodnim slučajevima nonijusna skala se očitava neposredno - bez dodatnih pomagala na instrumentu. Čitljivost nonijusne skale se može povećati dodavanjem satne skale koja se koristi za očitavanje delova najmanjeg podeoka na osnovnoj skali - vidi sliku 1.7 sa primerom očitavanja. Konstrukcija instrumenta ostaje čisto mehanička.

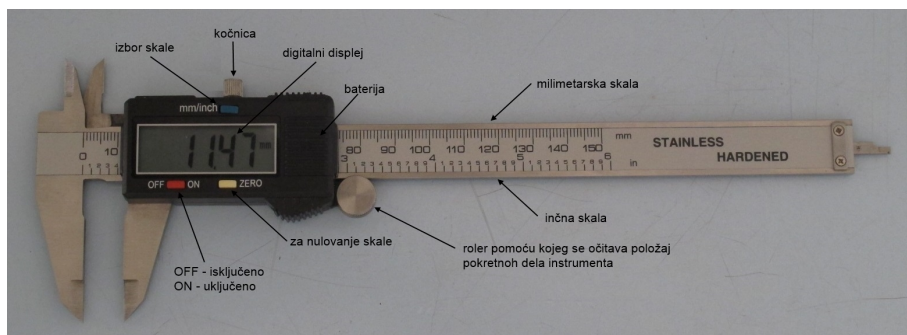


**Slika 1.7** Nonijus sa satnom skalom na kojoj je naznačeno da je tačnost instrumenta  $\tau = 0,02$  mm. Očitavanje celobrojnog dela se vrši na osnovnoj skali, a decimalnog zaokruživanjem na najbliži celi podelak satne skale.

### Nonijus sa digitalnim očitavanjem

Nonijusi sa digitalnim očitavanjem imaju dodatni elektronski deo koji prati položaj pokretnog dela instrumenta i prikazuje ga na digitalnoj skali; osnovna mehanička konstrukcija instrumenta je nepromenjena.

Kao primer realnog merenja digitalnim nonijusom, na slici 1.9 dajemo prikaz merenja širine kvadra od 1 inch. Rezultati merenja iste veličine običnim nonijusima su dati na slici 1.5.



**Slika 1.8** Nonijus sa digitalnim očitavanjem. Opseg 0-150 mm; tačnost 0,02 mm za  $l < 100$  mm, odnosno 0,03 mm za  $l > 100$  mm; rezolucija 0,01 mm; reproducibilnost 0,01 mm; maksimalna dozvoljena brzina pokretnog dela 1,5 m/s (pri većoj brzini instrument greši). LCD skala mora biti uključena (ON) da bi se koristila. Pre merenja potrebno je zatvoriti nonijus i proveriti da li pokazuje nulu; ako ne, nulovati skalom pritiskom na prekidač naznačen na slici. Rezultat merenja može biti prikazan na milimetarskoj ili inčnoj skali; skala se bira preklopnikom mm/inch. Kalibraciona kriva je na zadnjoj strani instrumenta.



**Slika 1.9** Merenje kvadra širine 1 inch digitalnim nonijusom.

## Princip rada nonijusne skale\*

Neka je  $l_n$  stvarna dužina najmanjeg podeoka na nonijusnoj skali sa  $N$  podelaka, a  $l_0$  dužina najmanjeg podeoka na osnovnoj skali. Dužina  $l_n$  se bira tako da je

$$Nl_n = (kN - 1)l_0, \quad (1.1)$$

gde je  $k$  (mali) prirodni broj (obični između 1 i 5). Drugim rečima, dužina najmanjeg podeoka nonijusne skale je

$$l_n = kl_0 - \frac{l_0}{N}, \quad (1.2)$$

tj, celobrojan umnožak  $kl_0$  najmanjeg podeoka osnovne skale skraćen za  $l_0/N$ , tj  $N$ -ti deo najmanjeg podeoka osnovne skale.

Kao što znamo, nonijusna skala se koristi za očitavanje delova najmanjeg podeoka osnovne skale. Neka je  $L$  dužina koju merimo i neka je

$$L = n_0l_0 + \Delta L, \quad (1.3)$$

gde je  $\Delta L$  deo koji treba da očitamo pomoću nonijusne skale, a koji je **manji** od najmanjeg podeoka osnovne skale, tj  $0 \leq \Delta L < l_0$ . Neka se podelak na nonijusnoj skali rednog broja  $n$  najbolje poklapa sa nekim podeokom na osnovnoj skali, i neka je  $n_0 + m$  redni broj tog podeoka osnovne skale. Tada je

$$nl_n = \Delta L + ml_0, \quad (1.4)$$

odakle je

$$\Delta L = [m - n(k - 1/N)]l_0, \quad (1.5)$$

odnosno

$$\frac{\Delta L}{l_0} = (m - nk) + \frac{n}{N}, \quad (1.6)$$

Pri  $\Delta L > 0$  je  $0 < \Delta L/l_0 < 1$ , te iz (1.6) zaključujemo da je  $m - nk = 0$ , što znači da je

$$\Delta L = \frac{n}{N}l_0, \quad (1.7)$$

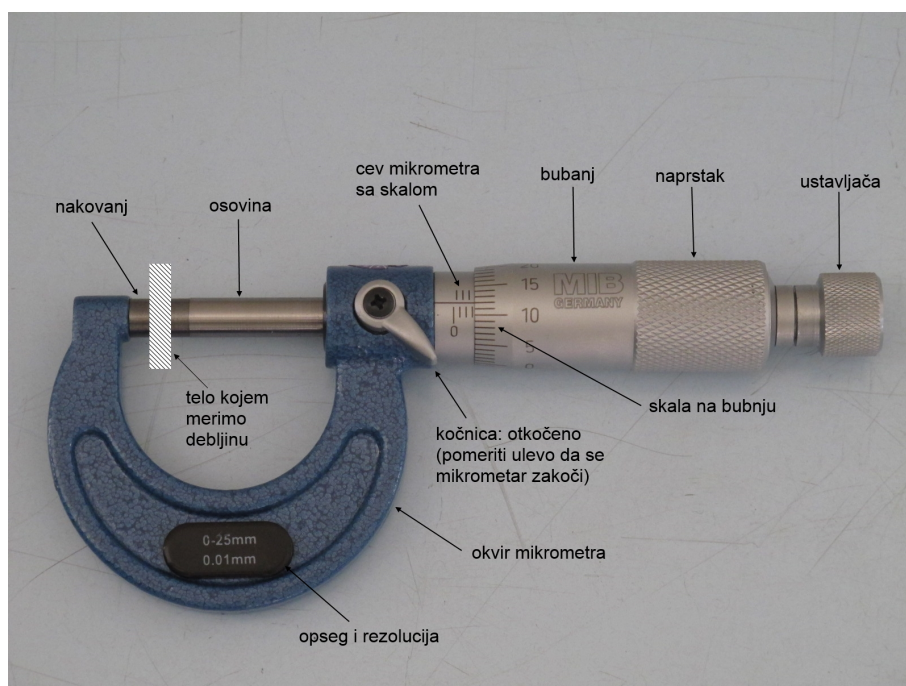
kao i da postoji samo jedan podelak nonijusne skale koji se najbolje poklapa (sa nekim podeokom osnovne skale). Ako je, pak,  $\Delta L = 0$ , onda zaključujemo da postoje dve podeoka na nonijusnoj skali koji se najbolje poklapaju: to su  $n = 0$  podelak (pa je  $m=0$ ) ali i  $n = N$  podelak (pa je  $m = kN - 1$ ).<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Ovaj slučaj je "pokriven" pravilom očitavanja decimalnog dela koje kaže da kada imamo dva podeoka nonijusne skale koji se najbolje poklapaju, onda se uzima onaj manji.

## 1.3 Mikrometarski zavrtnanj

Mikrometarski zavrtnanj<sup>3</sup> je najprecizniji mehanički instrument za merenje linearnih dimenzija. Zavisno od namene, izradjuje se u više oblika, gornjih opsega (od 25 mm pa do preko 1 m), tačnosti (od 0,01 mm pa do ispod 0,5  $\mu\text{m}$ ) i rezolucija (od 0,01 mm pa do ispod 0,1  $\mu\text{m}$ ).

Ovde ćemo se ograničiti na mikrometre namenjene merenju spoljašnjih linearnih dimenzija. Primer takvog mikrometra je prikazan na slici 1.10.



**Slika 1.10** Mikrometar za merenje spoljašnjih linearnih dimenzija. Okvir, nakovanj i cev su nepokretni, a osovina, bubanj, naprstak i ustavljača pokretni delovi mikrometra. Prikazan je mikrometar opsega 25 mm, tačnosti 0,01 mm i rezolucije 0,01 mm; hod zavrtnja je 0,5 mm, a na skali na bubnju se nalazi 50 podelaka.

Telo koje se meri se stavlja izmedju osovine i nakovnja i stisne zavrtnanjem mikrometra. Za grubo odvrtnanje i zavrtnanje mikrometra se koristi naprstak, a za fino - ustavljača. Nakon što osovina dodirne telo koje se meri, mikrometar

<sup>3</sup> Kratko - mikrometar, *engl.* - *micrometer [screw gauge]*.

se ustavljačom može dalje zatezati samo dok sila pritiska na mereno telo ne premaši 10 N. Nakon toga mikrometar se, i pored daljeg zavrtnja, više ne zateže i čuje se preskakanje ustavljače. Drugim rečima, preko ustavljače mikrometar ima kontrolu sile pritiska (kod nekim modela se ona može podešavati) čime se sprečava deformisanje tela koje se meri suvišnim zatezanjem mikrometra.

Upozorenje: mikrometar se pomoću bubnja može zategnuti više nego što dozvoljava sistem za kontrolu sile pritiska što, pored deformacije tela, može dovesti i do **trajnog oštećenja** mikrometra. Stoga je neposredno pre, ili u toku direktnog ili posredstvom merenog tela uspostavljenog kontakta nakovnja i osovine, **dozvoljeno** zavrtnanje mikrometra **samo pomoću ustavljače**, a **zabranjeno** pomoću bubnja.

### Princip rada mikrometra

Mikrometar radi na principu zavrtnja - translatorno pomeranje njegove osovine je proporcionalno uglu uvrtnja. Dužina za koju osovina zavrtnja napreduje pri okretanju bubnja za jedan ceo obrt se naziva hod zavrtnja i obeležava se sa  $h$ . Najčešći su mikrometri sa hodom od 0,5 mm, ali ima i onih sa hodom od 1 mm, kao i hodom od 0,25 mm.

Na bubnju mikrometra se nalazi  $N$  podelaka. Kada se mikrometar okrene za jedan podelak na bubnju rastojanje osovine mikrometra od nakovnja se promeni za  $h/N$  zato što je mikrometar iz tekućeg položaja okrenut za  $N$ -ti deo celog obrta.

### Očitavanje skale mikrometra

Milimetarska skala mikrometra se nalazi na cevi mikrometra. Milimetarski podeoci na skali mikrometra sa slike 1.10 se nalaze ispod horizontalne linije; označen je svaki 5-ti milimetar. Iznad horizontalne linije su podeoci na neparnom broju polovine milimetra (tj na 0,5 mm, 1,5 mm, itd). Na bubnju mikrometra se nalazi  $N = 50$  podelaka. Obzirom da je hod ovog mikrometra  $h = 0,5$  mm, to jedan podelak na bubnju "vredi"  $p = h/N = 0,01$  mm. Za toliko napreduje osovina mikrometra ka nakovnju pri okretanju mikrometra za 1 podelak na bubnju.

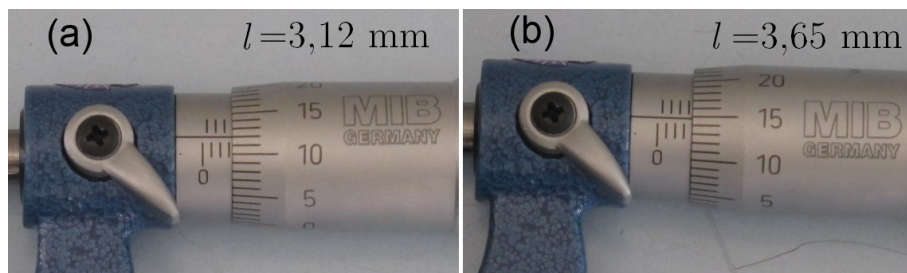
Položaj (kraja osovine mikrometra u odnosu na nakovanj) se očitava ovako:

1. na milimetarskoj skali se pročita broj podelaka  $m$  koji su "izašli" na obe milimetarske skale - donjoj i gornjoj. Pomnožen hodom mikrometra  $h$  on daje poluceli broj milimetara  $mh$  za koji se osovina udalji od nakovnja kada se mikrometar okrene za  $m$  celih obrta.
2. na skali bubnja se odredi onaj njen podeok koji se najbolje poklapa sa (horizontalnom) linijom milimetarske skale. Iz rednog broja  $n$  ovog podeoka nalazimo da je mikrometar, nakon  $m$  celih obrta, okrenut još za  $n/N$  deo narednog celog obrta, te da u tekućem položaju ukupno rastojanje osovine od nakovnja iznosi

$$l = mh + \frac{n}{N}h.$$

Za mikrometar sa slike 1.10 je hod  $h = 0,5$  mm a broj podelaka na bubnju je  $N = 50$ , te najmanji podelak na bubnju vredi  $h/N = 0,01$  mm.

Primer očitavanja mikrometra



Slika 1.11 (a)  $l = 3,12$  mm ( $m=6$ ,  $n = 12$ ); (b)  $l = 3,65$  mm ( $m=7$ ,  $n = 15$ ).

Rezultat pojedinačnog merenja mikrometrom

Po dogovoru, za grešku pojedinačnog merenja mikrometrom se uzima **tačnost mikrometra**

$$\tau = \frac{h}{N}.$$

Stoga se rezultat pojedinačnog merenja mikrometrom navodi u obliku

$$l \pm \Delta = l \pm \tau = \left(m + \frac{n}{N}\right) h \pm \frac{h}{N}.$$

### Korekcija očitavanja mikrometra

Kada je mikrometar zatvoren ustavljačom do kraja on bi trebalo da pokazuje nulu - vidi sliku 1.12(a). To nije uvek slučaj već se može desiti da mikrometar pokazuje neki podelak više - slika 1.12(b), ili manje - slika 1.12(c). Tada kažemo da je **nula mikrometra pomerena**.

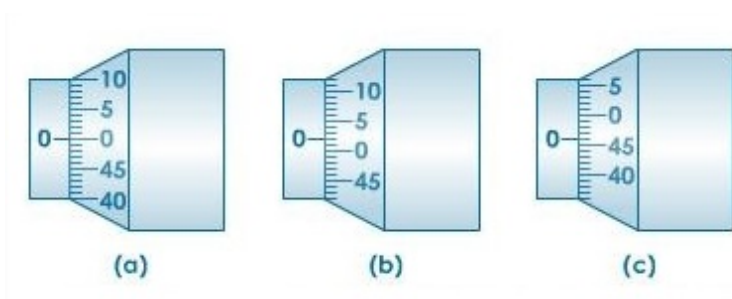
Mikrometar sa pomenom nulom se može koristiti za merenje, ali se mora izvršiti korekcija na nulu. Neka  $n_z$  broj najmanjih podelaka za koji je pomerena nula (u primeru (b) je  $n_z = 2$ , a u primeru (c) je  $n_z = -4$ ) i neka je  $l$  (nekorigovana) dužina koju smo izmeri mikrometrom. Tada korigovana dužina iznosi

$$l_c = l + \frac{n_z}{N} h,$$

dok najpesimističnija procena greške merenja glasi

$$\Delta l_c = \Delta l + \frac{h}{N} \approx 2\tau,$$

gde je  $\Delta l$  greška merenja nekorigovane dužine, a  $\tau$  je tačnost mikrometra.

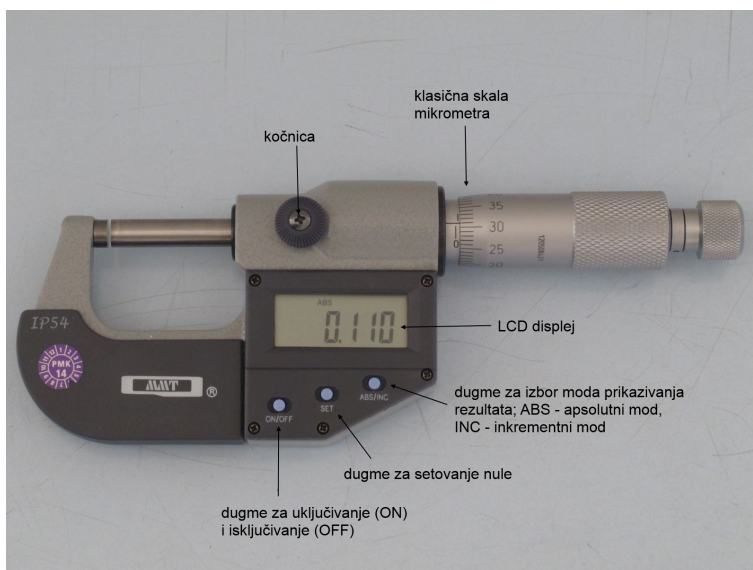


**Slika 1.12** Korekcija nule mikrometra: (a) ispravan položaj nule; (b) nula je pomerena - mikrometar pokazuje 2 najmanja podeoka **više**; (c) nula je pomerena - mikrometar pokazuje 4 najmanjih podelaka **manje**.



## Digitalni mikrometar

Pored mikrometara klasične konstrukcije bez pomagala za očitavanje skale, danas se sve više izrađuju digitalni mikrometri kod kojih se položaj određuje elektronski i prikazuje digitalno - vidi narednu sliku 1.13.



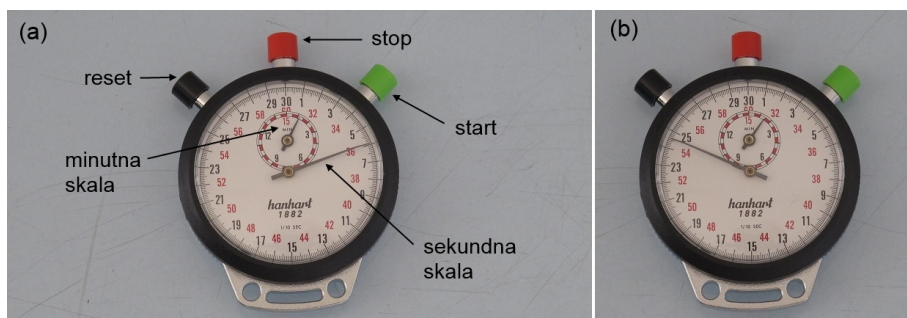
**Slika 1.13** Digitalni mikrometar. Opseg 0-25 mm, rezolucija 0,001 mm, tačnost 0,004 mm. Instrument se može očitati kako sa klasične mikrometarske skale, tako i sa LCD displeja koji se uključuje (ON) i isključuje (OFF) levim dugmetom. Pritiskom dva puta na srednje dugme se postavlja nula LCD displeja za bilo koji izabrani položaj osovine mikrometra. Desnim dugmetom se bira mod prikazivanja. U apsolutnom modu displej prikazuje rastojanje kraja osovine u odnosu na nulu LCD skale. U inkrementnom modu displej prikazuje rastojanje kraja osovine u odnosu na položaj kraja osovine u kojem je inkrementni mod uključen.

## 1.4 Hronometar

Hronometar, ili štoperica (*engl - chronometer ili stop watch*) je instrument za precizno i tačno merenje vremenskih intervala. Razlikujemo mehaničke i digitalne hronometre.

### Mehanički hronometar

Izgled i osnovne karakteristike mehaničkih hronometara variraju i mogu se jednostavno prepoznati na osnovu opisa mehaničkog hronometra kakav se koristi u studentskoj laboratoriji a koji je dat na slici 1.14 sa opisom osnovnih delova i dva primera očitavanja. Po konvenciji koje bi trebalo da se pridržavaju svi proizvođači mehaničkih hronometara, **tačnost i rezolucija mehaničkog hronometra su jednaki njegovom najmanjem podeoku,**



**Slika 1.14** Mehanički hronometar. Instrument ima dve skale: sekundnu - za prikazivanje sekundi (velika skala) i minutnu - za prikazivanje minuta (mala skala). Upravljanje hronometrom se vrši pomoću tri prekidača: start - za pokretanje, stop - za zaustavljanje i reset - za vraćanje pokazivanja hronometra na nulu. Ako se nakon zaustavljanja hronometar **ne resetuje** i ponovo startuje, on nastavlja odakle je stao.

Opseg: 15 minuta. Tačnost: 0,1 s. Rezolucija: 0,1 s.

Uočimo da:

- najmanji podelak na sekundnoj skali odgovara intervalu od 0,1 s.
- velika kazaljka obidje sekundnu skalu za 30 s.
- na velikoj skali postoje dve podel: crna - sa oznakama od 0 do 30 s (označene neparne sekunde) i crvena - sa oznakama od 30 do 60 s (označene parne sekunde).
- na maloj skali postoje bela i crvena polja koja odgovaraju koja deli svaki minut na 30 s i odgovaraju crnoj i crvenoj podeli sekundne skale. Označen je svaki treći minut.

Očitavanje: (a) 1 min:5,9 s=65,9 s; (b) 1 min:24,6 s=84,6 s.

### Digitalni hronometar

Kao primer digitalnog hronometra navodimo instrument sa slike 1.15. Kao i kod mehaničkih hronometara, izgled i konstrukcija digitalnih hronometara variraju, ali se njihove karakteristike mogu relativno lako rekonstruisati na osnovu datog primera.



**Slika 1.15** Digitalni hronometar; pokazuje 1 min i 34,89 s=94,89s.  
Opseg: 10 h. Tačnost: 0,01 s. Rezolucija: 0,01 s.

### Greška refleksa i greška pojedinačnog merenja hronometrom

Iako se tačnost hronometra može uzeti za grešku pojedinačnog prikazivanja hronometra, realna greška pojedinačnog merenja hronometrom zavisi od **reproducibilnosti refleksa** lica koje vrši merenje.

Hronometar prikazuje vremenski interval između startovanja i zaustavljanja koje vrši **čovek**. Hronometar se startuje nakon što se prepozna da je posmatrani događaj započeo, te od trenutka  $t_s$  kada događaj započne do trenutka startovanja hronometra protekne neko vreme  $\tau_s$ . Ovo vreme zavisi od **trenutnog refleksa** lica koje vrši merenje i varira od čoveka do čoveka, uz napomenu da ni za istog čoveka nije isto, već varira od merenja do merenja. Slično startovanju, hronometar zaustavlja lice koje meri nakon što se posmatrani događaj završio. Stoga između stvarnog završetka događaja  $t_z$  i trenutka zaustavljanja

hronometra protokne vreme  $\tau_z$  koje opet zavisi od refleksa. Stoga je vreme  $t_h$  koje prikazuje hronometar jednako

$$t_h = (t_z + \tau_z) - (t_s + \tau_s) + \epsilon = t + \tau_z - \tau_s + \epsilon,$$

gde je  $t = t_z - t_s$  pravo trajanje događaja, a  $\epsilon$  tekuća greška hronometra koja bi se javila i da je refleks bio idealan, tj da je  $\tau_s = \tau_z = 0$ . Sledi da je greška tekućeg rezultata merenja jednaka

$$t_h - t = \tau_r + \epsilon,$$

gde je  $\tau_r = \tau_z - \tau_s$  **greška refleksa**, tj greška nastala usled različitih vremena reakcije čoveka koji vrši merenje pri uključivanju i isključivanju hronometra.

Kada bi refleks bio **reproducibilan**, tj kada bi bilo  $\tau_z = \tau_s$  (što bi značilo da se pri isključivanju hronometra kasni isto koliko i pri uključivanju), bilo bi  $\tau_r = 0$ , te bi se greška tekućeg merenja svela na tekuću grešku izgradnje hronometra  $\epsilon$ . Međutim, refleks nije **reproducibilan** te je  $\tau_r \neq 0$  u opštem slučaju.

Greška refleksa  $\tau_r$  varira od čoveka do čoveka. Za istog čoveka varira zavisno od toga koliko je odmoran, kako je raspoložen, ... Kada bi pri potpuno istim uslovima isti čovek izvršio više merenja za redom, vrednosti za  $\tau_r$  bi se razlikovale, tj  $\tau_r$  je slučajna veličina. Ono što u postojećoj situaciji ima smisla je dati neku **okvirnu procenu** za  $\tau_r$  što bi trebalo da uradi lice koje meri. Iskustvo uči da je razumno uzeti da je  $\tau_r = 0, 1$  s, osim kada smo umorni i kada bi trebalo uzeti veću vrednost.

Može se smatrati da su greška refleksa  $\tau_r$  i greška izgradnje hronometra  $\epsilon$  nezavisne slučajne veličine i stoga i kvadratno kombinovati, tj uzeti da je greška pojedinačnog merenja hronometrom  $\Delta t$  jednaka

$$\Delta t = \sqrt{\tau_r^2 + \epsilon^2}.$$

Kod digitalnih hronometara je tipično  $\epsilon \leq 0,01$  s te je  $\Delta t \approx \tau_r$ , dok kod mehaničkih sa  $\epsilon = 0, 1$  s treba uzeti  $\Delta t = 0, 141$  s  $\rightarrow 0, 2$  s.

Naglasimo da se greška refleksa znatno smanjuje ako se uključivanje i isključivanje hronometra vrši elektronski. I ovde, međutim, postoji principijelno isti problem jer i elektronski uređaji imaju svoju grešku refleksa, ali je ona znatno manja!

### Merenje perioda hronometrom

Greška merenja perioda se može znatno smanjiti merenjem ne jednog, već više perioda. Neka je je  $t_N \pm \Delta t_N$  rezultat merenja  $N$  perioda. Tada rezultat merenja perioda glasi

$$T \pm \Delta T = \frac{t_N}{N} \pm \frac{\Delta t_N}{N},$$

tj greška merenja perioda je  $N$  puta manja od greške tog pojedinačnog merenja  $N$  perioda. Primetimo sledeće: da smo merili trajanje  $t_1$  samo jednog perioda greška ovog merenja bi bila manje više ista kao i u prethodnom slučaju, tj  $\Delta t_1 \approx \Delta t_N$ .

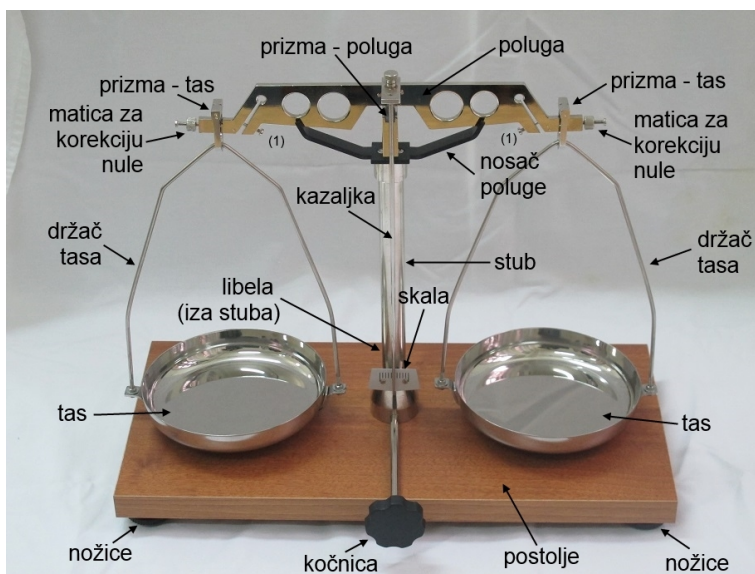
U vezi merenja perioda vredi napomenuti da način merenja perioda između amplitudnih položaja nije najoptimalniji. U amplitudnom položaju sistem (npr klatno) se najduže zadržava te ovaj događaj<sup>4</sup> ima najlošiju vremensku rezoluciju. Najbolju vremensku rezoluciju ima prolazak klatna kroz ravnotežni položaj kroz koji klatno prolazi za najkraće vreme. Sasvim generalno, ako imamo mogućnost izbora početnog i krajnjeg događaja, onda za te događaje birati one sa **najoštrijom** vremenskom rezolucijom jer se tako redukuje greška refleksa, kako ljudi, tako i elektronskih start/stop sistema.

<sup>4</sup> Kada ovde govorimo o događajima ne treba misliti na trenutni položaj klatna već na položaje koji su okom različiti, recimo  $\pm 1^\circ$  oko trenutnog položaja.

## 2 Instrumenti za merenje mase

### 2.1 Terazije

Terazije su mehanički instrument za merenje mase kojim se nepoznata masa upoređuje sa poznatom masom tegova. Izradjuju se u raznim opsezima i tačnostima. Na slici 2.1 su prikazane terazije koje se koriste u studentskoj laboratoriji. Tačnost ovakvih terazija je reda centigrama (0,01 g).



Slika 2.1 Centigram terazije; opseg 500 g i tačnost reda 0,01 g.

Komplet tegova koji se koristi za merenje je prikazan na narednoj slici 2.2.



**Slika 2.2** Komplet tegova sa pincetom za terazije; najveći teg je mase 200 g, a najmanji 1 mg.

### **UPOZORENJE**

Sve operacije sa terazijima (npr dodavanje na tasove, korekcija položaja terazija,..) vršiti sa

**zakočenim terazijama.**

U suprotnom će doći do oštećenja terazija. Terazije se smeju otkočiti samo kada su **skoro uravnotežene**. Pošto obično ne znamo da li su terazije skoro uravnotežene

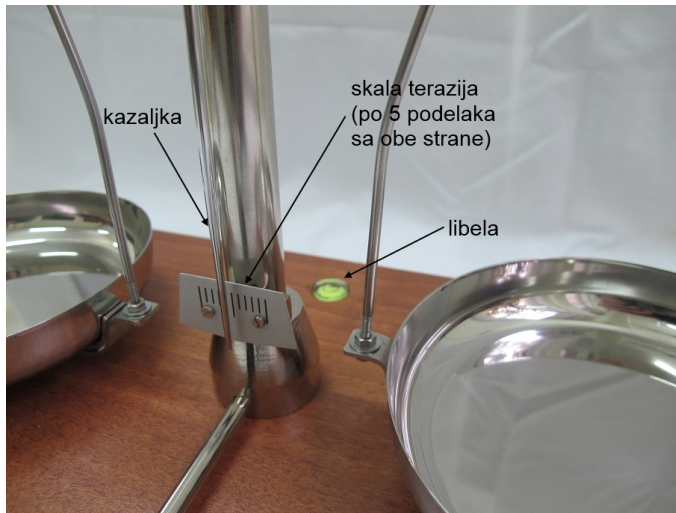
**nikad ne otkočiti terazije odjednom do kraja.**

Terazije **otkočivati pomalo** prateći položaj kazaljke. Tek kada smo sigurni da će kazaljka ostati unutar skale otkočiti terazije potpuno. U suprotnom, sprovesti uravnotežavanje.

### Priprema terazija za rad

Pre početka merenja potrebno je pripremiti terazije za rad što uključuje:

1. postavljanje terazija u pravilan položaj,
2. određivanje praktične nule i
3. određivanje tačnosti terazija.



**Slika 2.3** Skala terazija.

### Postavljanje terazija u pravilan položaj

Libelom (koja se nalazi se na postolju iza stuba, vidi sliku 2.3) utvrditi da li je postolje terazija **horizontalno**. Postolje je horizontalno kada se vazdušni mehur u libeli nalazi na sredini nacrtanog kruga. Ako postolje nije horizontalno, postaviti ga u horizontalan položaj okretanjem nožica terazija.



### Odredjivanje praktične nule

Ravnotežni položaj kazaljke **neopterećenih** terazija bi trebalo da se nalazi na nuli skale. Kada se, međutim, neopterećene terazije otkoče i puste da osciluju, one se nakon nekog vremena zaustavljaju u realnom ravnotežnom položaju<sup>1</sup> koji se naziva **praktična nula terazija** koja može da odstupa od nule skale. Sva uravnotežavanja terazija tokom merenja se vrše u odnosu na praktičnu nulu.

Odredjivanje praktične nule terazija se vrši po sledećoj proceduri:

- a). neopterećene terazije se otkoče i puste da osciluju;
- b). registruje se 5 **sukcesivnih** amplitudnih položaja kazaljke koji se naizmenično smenjuju sa jedne odnosno druge strane;
- c). nadje se srednja vrednost 3 očitavanja sa jedne i 2 očitavanja sa druge strane, pa se za praktičnu nulu uzme **zaokružena** srednja vrednost ove dve srednje vrednosti.

Primer: Neka su očitani amplitudni položaji  $-5; 3; -5; 2; -4$ . Sa leve strane skale su očitani  $-5; -5; -4$  i njihova srednja vrednost je  $(-5 - 5 - 4)/3 = -4,67$ , a sa desne  $3; 2$  i njihova srednja vrednost je  $(3 + 2)/2 = 2,5$  te je praktična nula na  $(-4,67 + 2,5)/2 = -1,08$ , odnosno na  $-1$  nakon zaokruživanja.

Napomena: Pomoću matica za korekciju praktična nula se može poklopiti sa nulom skale. Ovo doterivanje terazija **ne vrše studenti** već izvodjači nastave.

<sup>1</sup> Striktno govoreći, terazije se zbog statičkog trenja između poluge i prizme preko koje se poluga oslanja na stub terazija zaustavljaju u neposrednoj blizini praktične nule. Položaj u kojem se terazije zaustavljaju zavisi od **detalja** kretanja terazija i praktično ga je nemoguće predvideti. Ako je prizma oštra statičko trenje je zanemarivo, te se može smatrati da se terazije zaustavljaju u praktičnoj nuli.

### Određjivanje osetljivosti i tačnosti neopterećenih terazija

Kao što je poznato, osetljivost instrumenta je  $S = dy/dx$  gde je  $y$  indikatorska veličina, a  $x$  veličina koju merimo.<sup>2</sup> Kod terazija se za indikatorsku veličinu  $y$  uzima ugao  $\varphi$  koji kazaljka zaklapa sa vertikalom,<sup>3</sup> dok se za  $x$  uzima  $m$  - **masa pretega**, tj razlika merene mase od mase tegova na drugom tasu. Stoga je osetljivost terazija data sa

$$S = \frac{d\varphi}{dm} \approx \frac{\varphi}{m}$$

i izražava se brojem podelaka za koji skrene kazaljka terazija po jediničnom pretegu (koji se obično izražava u miligramima).

Za tačnost izgradnje terazija se uzima recipročna vrednost osetljivosti

$$\tau = 1/S,$$

te je tačnost terazija data masom pretega po podeoku skretanja kazaljke terazija.

Određjivanje tačnosti neopterećenih terazija se vrši po sledećoj proceduri:

- a). na jedan tas neopterećenih terazija se stavi mali preteg  $m$  zbog čega će terazije kada se otkoče skreniti u odnosu na praktičnu nulu; najbolje je staviti **najveći preteg** za koji **kazaljka** još uvek **ostaje unutar skale terazija**.
- b). pročita se broj podelaka skale  $n$  za koji je kazaljka skrenula u odnosu na praktičnu nulu i izračuna tačnost

$$\tau = \frac{m}{n}.$$

<sup>2</sup> Ispravnije je reći da je osetljivost  $S = \partial y / \partial x$  zato što indikatorska veličina  $y$  u opštem slučaju zavisi i od nekih drugih veličina a ne samo od merene veličine  $x$ , te se umesto običnog izvoda mora koristiti parcijalni izvod.

<sup>3</sup> Ovde je broj podelaka za koji je skrenula kazaljka najzgodnija jedinica za ugao  $\varphi$ .

## Postupak merenja

Miligramske tegove hvatati pincetom za ušice tega, nikako rukama. Ostale tegove hvatati čistim rukama. Tegovi se ne smeju zaprljati. Posle rada zatvoriti kutiju sa tegovima da po njima ne pada prašina.

Merenje nepoznate mase se vrši tako što se na jedan tas terazija stavi telo čija se masa meri a na suprotni stave tegovi. Potrebno je staviti onoliko tegova da terazije budu uravnotežene, tj da kazaljka bude na praktičnoj nuli kada se terazije potpuno otkoče.

Prvi korak u uravnotežavanju terazija je da se na tas stavi toliko tegova da njihova masa  $m_v$  bude veća od merene mase.

Određjivanje na kom se tasu nalazi veća masa se vrši tako što se kočnica **malo oslobodi (ne do kraja)**. Kazaljka **skreće ka "lakšem" tasu**.

Nadjena veća masa  $m_v$  omogućava da znamo interval  $(m_m; m_v)$  koji čine manja masa  $m_m$  (za koju se na početku merenja može uzeti  $m_m = 0$ ) i veća masa  $m_v$  a kojem se nalazi merena masa  $m$ , tj interval za koji važi

$$m_m \leq m \leq m_v .$$

Tokom merenja nastoji da što više suzimo interval  $(m_m; m_v)$ , što se najbrže radi njegovim **polovljenjem** kao u sledećem primeru.

Zamislimo da merimo masu  $m = 53,256$  g. Neka smo u prvom koraku našli da je  $m_v = 100$  g, tj da merena masa leži u intervalu  $(0; 100)$  g. Probamo sa tegom od 50 g i nalazimo da je njegova masa manja od  $m$ , te za sledeći interval uzimamo  $(50; 100)$  g. Jednostavnije od polovljenja je da probamo dodajući teg od 20 g. Tako nalazimo da je  $m < 70$  g, te je novi interval  $(50; 70)$  g. Nastavljamo sa 60 g (tako što skinemo teg od 20 g a stavimo teg od 10 g) i dobijamo interval  $(50; 60)$  g, zatim skidamo 10 g i dodajemo 5 g tj dobijamo interval  $(50; 55)$  g. Ako sada skinemo 5 g i dodamo 2 g nalazimo da je masa tegova manja od merene mase te imamo novo  $m_m = 52$  g, tj interval  $(52; 55)$  g. Dalje dodajemo još 2 g te nalazimo novo  $m_v = 54$  g, tj interval  $(52; 54)$  g, pa onda skidamo 2 g i dodajemo 1 g i nalazimo  $(53; 54)$  g i tako redom dok ne stignemo do intervala  $(53,250; 53,260)$  g, kada terazije postaju uravnotežene. Pokušaji finijeg uravnotežavanja korišćenjem tegova od 5 mg, 2 mg i 1 mg (najverovatnije) ne daje rezultat jer su terazije centigramske tačnosti, tj njihov najmanji podelak vredi oko 10 mg.

Nasuprot opisanoj situaciji gde terazije "ne osećaju" najmanje tegove, postoje slučajevi kada najmanji teg koji imamo dovodi do skretanja za više od 1 podeoka. Tada se terazije ne mogu uravnotežiti tegovima već je potrebno izvršiti korekciju na uravnotežavanje. Ako je kazaljka skrenula za  $n$  podelaka u odnosu na praktičnu nulu onda korekcija iznosi

$$\Delta m_c = n\tau, \quad (2.1)$$

i tu korekciju treba dodati kada je masa tegova manja od mase tela, odnosno oduzeti u suprotnom slučaju.

### Greška pojedinačnog merenja terazijama

Za grešku pojedinačnog merenja terazijama  $\Delta m$  po dogovoru uzimamo **maksimiziranu** vrednost tačnosti terazija, tj

$$\Delta m = \tau \uparrow$$

tj najmanji broj miligrama sa jednom cifrom različitom od nule a koji je veći od  $\tau$ ; ako je prva cifra 1, dozvoljava se i druga cifra.

Primer: Za  $\tau = 23,4$  mg je  $\Delta m = 30$  mg, dok je za  $\tau = 14,6$  mg  $\Delta m = 15$  mg.

Napomena: Tačnost (i osetljivost) terazija zavise od njihovog opterećenja. Ova zavisnost je obično toliko slaba da je dovoljno naći tačnost neopterećenih terazija i koristiti je pri svim opterećenjima. Ispravnije je, međjutim, dodati mali preteg pri tekućem opterećenju i tako naći tačnost.

### Krajnji rezultat pojedinačnog merenja terazijama

Krajnji rezultat pojedinačnog merenja terazijama navodimo u obliku

$$m \pm \Delta m,$$

gde je  $m$  izmerena masa (sa eventualnom korekcijom na uravnotežavanje) usaglašena **zaokruživanjem** sa greškom pojedinačnog merenja  $\Delta m$ .

Primer: Za  $\Delta m = 30$  mg i (nezaokruženim)  $m = 53,2584$  g dobijenim uz korekciju je krajnji rezultat merenja  $m = (53,26 \pm 0,03)$  g, dok bi za  $\Delta m = 15$  mg krajnji rezultat merenja trebalo da glasi  $m = (53,258 \pm 0,015)$  g.

Napomena: Ukoliko je merena masa prosečne gustine koja se znatno razlikuje od gustine tegova  $\rho = 7,9$  g/cm<sup>3</sup> potrebno je izvršiti **korekciju na potisak** - vidi poglavlje 2.2. Principijelno je takodje moguće da krakovi poluge terazija nisu jednaki te je potrebno proveriti da li je potrebna korekcija na nejednakost krakova - vidi poglavlje 2.1.

### Princip rada terazija - osnovna teorija

U osnovi terazije rade na principu **ravnokrake poluge**. Kada na raznostranu polugu krakova  $l_L$  i  $l_D$  deluju momenti sila  $G_L = F_L l_L$  i  $G_D = F_D l_D$  koji nastoje da okrenu polugu u suprotnim smerovima i koji su nastali dejstvom sila  $F_L$  i  $F_D$  na levi, odnosno desni, kraje poluge, uslov ravnoteže poluge glasi  $G_L = G_D$ , odnosno

$$F_L l_L = F_D l_D ,$$

gde su  $l_L$  i  $l_D$  dužina levog, odnosno desnog, kraka poluge. Kod terazija sile  $F_L$  i  $F_D$  potiču od težina  $m_L g$  i  $m_D g$  masa  $m_L$  i  $m_D$  stavljenih na tasove terazija, odakle sledi uslov ravnoteže

$$m_L l_L = m_D l_D . \quad (2.2)$$

U idealnom slučaju krakovi terazija su jednaki,  $l_L = l_D$ , te prethodni uslov postaje

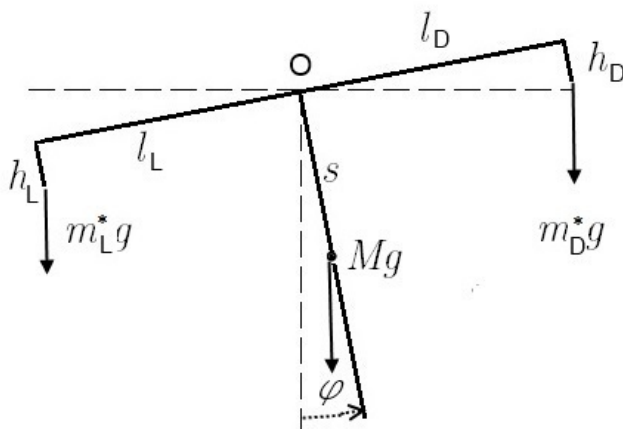
$$m_L = m_D ,$$

i po njemu su terazije u ravnoteži kada je merena masa  $m$  (stavljena na jedan tas terazija) jednaka masi tegova  $m_w$  (stavljenih na suprotni tas terazija).

Prethodni opis se odnosi na pojednostavljenu i idealizovanu situaciju. Zane-marana je masa tasova, masa njihovih držača, masa poluge, uzeto je da se centar mase poluge sa kazaljkom nalazi na osloncu,... itd. Detaljniji opis principa rada terazija koji vodi računa o ovim faktorima je dat u narednom poglavlju i pri prvom čitanju se može preskočiti.

### Princip rada terazija - detaljnija teorija\*\*

Na slici 2.4 je dat dijagram najvažnijih sila koje deluju na terazije. Polugu sa kazaljkom posmatramo kao jedno telo mase  $M$  čiji se centar mase nalazi na rastojanju  $s$  od tačke oslonoca  $O$ ; dužina levog kraka poluge je  $l_L$ , a desnog  $l_D$ . Tačka vešanja levog tase je na rastojanju  $h_L$  od poluge; analogno imamo  $h_D$  za desni tas. U idealnom slučaju bi trebalo da bude  $h_L = h_D = 0$ , a u realnom su ove dve veličine znatno manje od 1 mm, a mogu se i korigovati zavrtnjima (1) na slici 2.1. Masa okačena na levoj strani poluge je  $m_L^* = m_{LT} + m_L$ , gde je  $m_{LT}$  masa levog tase sa držačem, dok je  $m_L$  masa levog tereta (telo ili tegovi). Analogno na desnoj strani imamo okačenu masu  $m_D^* = m_{DT} + m_D$  sastavljenu iz mase desnog tase sa držačem  $m_{DT}$  i mase desnog tereta  $m_D$ .



Slika 2.4 Dijagram osnovnih sila koje deluju na terazije.

Jednačina kretanja poluge sa kazaljkom je

$$J\ddot{\varphi} = G$$

gde je  $J$  moment inercije, a  $G$  rezultujući moment sile koji kada je poluga izvedena iz horizontalnog položaja za ugao  $\varphi$  aproksimativno glasi

$$G = -Mgs \sin \varphi - m_D^*g[l_D \cos \varphi + h_D \sin \varphi] + m_L^*g[l_L \cos \varphi - h_L \sin \varphi] + G_r,$$

gde  $G_r$  označava moment sile otpora vazduha i trenja u osloncu poluge. U ravnotežnom položaju je  $G = 0$  i  $G_r \approx 0$  (jer se statičko trenje u ležištu obično može zanemariti). Ako je opterećenje obeju strana poluge skoro isto tada je ugao  $\varphi$  koji odgovara ravnotežnom položaju mali, te je  $\sin \varphi \approx \varphi$  a  $\cos \varphi \approx 1$ . Tako nalazimo da je sasvim generalno

$$\varphi = \frac{m_L^*l_L - m_D^*l_D}{Ms + m_L^*h_L + m_D^*h_D}. \quad (2.3)$$

U slučaju neopterećenih terazija je  $m_L = m_D = 0$ , tj  $m_L^* = m_{LT}$  i  $m_D^* = m_{DT}$ , te iz prethodne formule (2.3) nalazimo ugao praktične nule

$$\varphi_0 = \frac{m_{LT}l_L - m_{DT}l_D}{Ms + m_{LT}h_L + m_{DT}h_D}. \quad (2.4)$$

Iz formule (2.4) se vidi da se praktična nula poklapa sa nulom skale,  $\varphi_0 = 0$ ,

ako npr levi i desni tas sa držačem imaju jednake mase,  $m_{LT} = m_{DT}$ , i ako su krakovi poluge jednaki,  $l_L = l_D$ .

Ako se na npr levi tas neopterećenih terazija stavi mali preteg  $\Delta m$ , zbog  $Ms + m_L^* h_L + m_D^* h_D \approx Ms + m_{LT} h_L + m_{DT} h_D$ , vidimo da ugao skretanja u odnosu na praktičnu nulu  $\Delta\varphi \equiv \varphi - \varphi_0$  iznosi

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta m l_L}{Ms + m_{LT} h_L + m_{DT} h_D}$$

odakle, uzimajući  $l = l_L$  za dužinu kraka terazija, nalazimo izraz za osetljivost neopterećenih terazija

$$S_0 = \left( \frac{\Delta\varphi}{\Delta m} \right)_0 = \frac{l}{Ms + m_{LT} h_L + m_{DT} h_D} \approx \frac{l/M}{s}, \quad (2.5)$$

gde je u poslednjoj aproksimaciji uzeto da je  $m_{LT} h_L + m_{DT} h_D \approx 0$ . Iz ovog izraza se vidi da su terazije tim osetljivije što im je krak veći, tačnije količnik  $l/M$  veći (jer se povećanjem  $l$  povećava i  $M$ ), a težište što više, tj  $s$  što manje.

Sličnim postupkom se može naći da osetljivost terazija opterećenih masom  $m$  iznosi

$$S_m = \left( \frac{\Delta\varphi}{\Delta m} \right)_m = \frac{l}{(Ms + m_{LT} h_L + m_{DT} h_D) + m(h_L + h_D)}, \quad (2.6)$$

odakle se vidi da osetljivost zavisi od opterećenja  $m$ , kao i da opada sa  $m$  kada je  $h_L + h_D > 0$ , što je tipičan slučaj. Zavisnost osetljivosti od opterećenja je tipično slaba jer je član  $m(h_L + h_D)$  znatno manji od konstantnog člana  $Ms + m_{LT} h_L + m_{DT} h_D$  zato što su  $h$ -ovi znatno manji od  $s$ .

Formula za korekciju na uravnotežavanje je realtivno komplikovana; ako je, međjutim, član  $m_L^* h_L + m_D^* h_D$  zanemariv u odnosu na  $Ms$  i ako se krakovi mogu smatrati jednakim,  $l_L = l_D = l$ , tada ugao skretanja približno iznosi  $\varphi \approx (m_L^* l_L - m_D^* l_D)/Ms$ , dok je u istoj aproksimaciji ugao praktične nule  $\varphi_0 \approx (m_{LT} l_L - m_{DT} l_D)/Ms$ . Stoga ugao skretanja u odnosu na praktičnu nulu glasi

$$\varphi - \varphi_0 \approx \frac{l/M}{s} (m_L - m_D) = S_m \Delta m, \quad (2.7)$$

gde je  $S_m$  osetljivost na opterećenju  $m \approx m_L \approx m_D$ , dok je  $\Delta m_c = m_L - m_D$  tražena korekcija. Znajući da je tačnost terazija  $\tau = 1/S_m$  tako dobijamo formulu za korekciju (2.1).

### Korekcija na nejednakost krakova terazija

Kada se govori o korekcijama tada pretpostavljamo da su korekcije male i da ih je potrebno vršiti u odnosu na idealan slučaj ravnoteže terazija. Videli smo, jednačina (2.2), da uslov ravnoteže terazija glasi

$$m_L l_L = m_D l_D ,$$

kada krakovi terazija nisu jednaki. Zamislimo da je merena masa  $m$  stavljena na levi tas uravnotežena masom tegova  $m_{wD}$  stavljenim na desni tas terazija. Tada je

$$m l_L = m_{wD} l_D .$$

Neka smo zatim stavili masu  $m$  na desni tas i uravnotežili je masom tegova  $m_{wL}$  stavljenim na levi tas terazija; tada je

$$m_{wL} l_L = m l_D .$$

Deobom poslednje dve jednačine nalazimo

$$\frac{m}{m_{wL}} = \frac{m_{wD}}{m} ,$$

odakle je

$$m = \sqrt{m_{wL} m_{wD}} , \tag{2.8}$$

što predstavlja Gausovu metod eliminacije nejednakosti krakova terazija. Obzirom da su krakovi terazija približno jednaki, moraju biti približno jednake i mase tegova  $m_{wL}$  i  $m_{wD}$  te se prethodni izraz svodi na

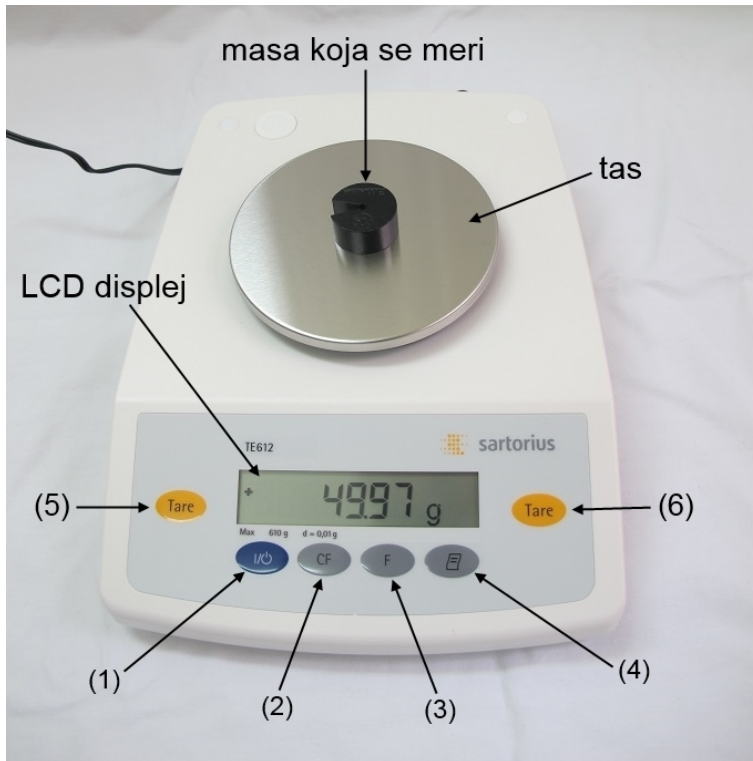
$$m \approx \frac{m_{wL} + m_{wD}}{2} . \tag{2.9}$$

Napomenimo da pored Gausovog postoje i drugi metodi eliminacije nejednakosti krakova terazija o kojima zainteresovani čitalac može saznati više u specijalizovanoj literaturi.



## 2.2 Digitalna vaga

Digitalna vaga je elektronski uređaj za merenje mase. Izmerena vrednost se prikazuje na digitalnom LCD displeju. Kod ovog instrumenta se senzorom meri sila kojom masa deluje na tas vage. Digitalne vage se izradjuju u velikom rasponu njihovih karakteristika (opseg, tačnost, rezolucija...). Na slikama 2.5 i 2.6 su dva tipa digitalnih vaga koje se koriste u studentskoj laboratoriji.



**Slika 2.5** Digitalna vaga opsega 0-610 g; tačnost 0,01 g.

(1) - uključivanje/isključivanje vage; (2) - ; (3) - ; (4) - ; (5) i (6) - tariranje. Vagi je potrebno 30 min da se zagreje.

### Tariranje

Digitalne vage imaju mogućnost **tariranja**, tj postavljanja skale na nulu i ako je vaga opterećena. Tariranje se vrši tako što se vaga optereti željenom masom i



**Slika 2.6** Digitalna vaga opsega 0-3000 g; tačnost 0,1 g; rezolucija 0,1 g.  
 (1) - **kratak pritisak**: ako je isključena, vaga se uključuje; ako je vaga uključena skala se postavlja na nulu (tj tarira ako je vaga opterećena).

pritisne dugme za tariranje nakon čega skala vaga pokazuje nulu. Nakon tariranja vaga prikazuje **razliku** tekućeg opterećenja i opterećenja pri kojem je izvršeno tariranje. To npr znači da ako je vaga tarirana pri opterećenju od 100 g, ona će prikazivati 50 g kada se optereti sa još 50 g, tj ukupno sa 150 g. Ako je ukupno opterećenje smanjeno na 80 g, vaga pokazuje -20 g. Tariranje neopterećenje vage je isto što i nulovanje skale.

### Korekcija na potisak

Korekcija na potisak je potrebna kad god se meri masa čija je gustina znatno različita od gustine tegova. Ova korekcija se vrši kako kod terazija tako i kod digitalnih vaga.

Na jedan tas terazija deluje težina  $mg$  merenog tela umanjena za potisak vazduha  $\rho_v Vg$  koje trpi telo; odve je  $\rho_v$  gustina vazduha,<sup>4</sup> a  $V$  - zapremina tela. Analogno tome, na drugi tas terazija deluje težina tegova  $m_w g$  umanjena za potisak vazduha  $\rho_v V_w$  na tegove zapremine  $V_w$ . Stoga pri idealno uravnoteženim terazijama vredi

$$m - \rho_v V = m_w - \rho_v V_w,$$

odakle nalazimo da korekcija na potisak vazduha,  $\Delta m_p \equiv m - m_w$ , iznosi

$$\Delta m_p = \rho_v (V - V_w) = \rho_v \left( \frac{m}{\rho} - \frac{m_w}{\rho_w} \right),$$

gde je  $\rho$  gustina merenog tela, a  $\rho_w$  gustina tegova. Kako je  $m \approx m_w$ , to je

$$\Delta m_p \approx \rho_v m \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_w} \right),$$

odnosno

$$\frac{\Delta m_p}{m} \approx \frac{\rho_v}{\rho} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_w} \right).$$

Iz nadjenog izraza za relativnu korekciju se vidi da se korekcija javlja kada je  $\rho \neq \rho_w$ . Pri  $\rho > \rho_w$  korekcija negativna (jer telo trpi manji potisak od tegova), dok je pri  $\rho < \rho_w$  korekcija pozitivna. Za tela male gustine korekcija može biti znatna i data je prostijim izrazom

$$\frac{\Delta m_p}{m} \approx \frac{\rho_v}{\rho}.$$

Uočimo da je za nalaženje korekcije potrebno makar približno znati gustinu tela ili pak njegovu zapreminu.

Korekcija na potisak je potrebna i kod elektronskih vaga koje mere masu pomoću senzora sile. Ovaj senzor se kalibriše tako što se njime izmeri kalibracioni teg (i eventualno unese poznata vrednost ubrzanja Zemljine teže). No, ni senzor sile "ne zna" da obračuna potisak vazduha pa je korekcija na potisak potrebna i odve.

<sup>4</sup> Pri normalnim uslovima gustina vazduha iznosi  $\rho_v = 1,29 \text{ kg/m}^3$ .

# 3 Merenje gustine čvrstih tela

---

## 3.1 Gustina

Srednja gustina mase je

$$\rho = \frac{m}{V},$$

gde je  $m$  masa, a  $V$  zapremina tela. Jedinica za gustinu je  $[\rho] = [m]/[V]$ , tj količnik jedinice za masu i jedinice za zapreminu, i u SI sistemu to je  $1 \text{ kg/m}^3$ . Pored ove jedinice, u praksi se dosta koristi  $\text{g/cm}^3$ .

Srednja gustina je prosečna karakteristika tela. Pored nje uvodi se i **lokalna gustina mase**

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

gde je  $\Delta m$  masa sadržana u maloj zapremini  $\Delta V$  oko tačke tela u kojoj određujemo lokalnu gustinu. Uzimajući da je masa kontinualno raspodeljena u prostoru lokalnu gustinu možemo definisati i sa

$$\rho = \frac{dm}{dV},$$

gde je  $dm$  masa sadržana u beskonačno maloj zapremini  $dV$  oko posmatrane tačke tela. Znajući kako se lokalna gustina menja u prostoru, masu sadržanu u zapremini  $V$  možemo izračunati kao  $m = \int_V \rho(\vec{r}) dV$ .

Lokalna gustina se može menjati od tačke do tačke tela. Ako je lokalna gustina ista u svim tačkama tela, onda kažemo da je telo **homogeno** i za njega se lokalna i srednja gustina poklapaju.

Gustina na prvom mestu zavisi od vrste materijala od kojeg je telo. Gustina materijala je jedna od važnih karakteristika materijala. Gustina materijala zavisi od temperature i pritiska, odnosno gravitacionog polja, a u manjoj meri i od električnog i magnetnog polja u kojima se materijal nalazi.

## 3.2 Merenje gustine čvrstih tela piknometrom

Piknometar, slika 3.1, je stakleni balon koji služi za merenje gustine granuliranih (usitnjenih) čvrstih materijala i tečnosti. Zapremina piknometra i temperatura na kojoj je zapremina kalibrisana obično su naznačeni na piknometru. Pri merenju gustine čvrstih tela koristi se tečnost poznate gustine  $\rho_0$ ; u studentskoj laboratoriji je to voda čija je gustina u funkciji temperature data na slici 3.1 desno.



Temp (°C)	Density (kg/m <sup>3</sup> )
+100	958.4
+80	971.8
+60	983.2
+40	992.2
+30	995.6502
+25	997.0479
+22	997.7735
+20	998.2071
+15	999.1026
+10	999.7026
<b>+4</b>	<b>999.9720</b>
0	999.8395
-10	998.117
-20	993.547
-30	983.854

**Slika 3.1** Piknometar (levo) i gustina destilisane vode na normalnom pritisku u funkciji temperature (desno).

Čvrsto telo (materijal) čija se gustina meri piknometrom mora biti usitnjeno (granulisano), nerastvorno u tečnosti koja se koristi i da ne upija tu tečnost.

### Postupak merenja

Merenje gustine čvrstog tela se vrši na sledeći način:

1. izmeri se masa čvrstog tela  $m_t$

2. na isti tas terazija se stave čvrsto telo i piknometar napunjen do vrha tečnošću poznate gustine  $\rho_0$ , pa se izmeri njihova zajednička masa  $m_1$
3. telo se zatim stavi u piknometar iz koga istekne višak tečnosti; piknometar se izbriše, pa se zatim izmeri masa  $m_2$  piknometra sa tečnošću i telom u njemu.

Zapremina tela  $V_t$  je jednaka zapremini tečnosti koju je telo istisnulo iz piknometra. Obzirom da je  $m_1 - m_2$  masa istisnute tečnosti, ova zapremina je jednaka

$$V_t = \frac{m_1 - m_2}{\rho_0},$$

odakle za gustinu čvrstog tela  $\rho_t = m_t/V_t$  nalazimo

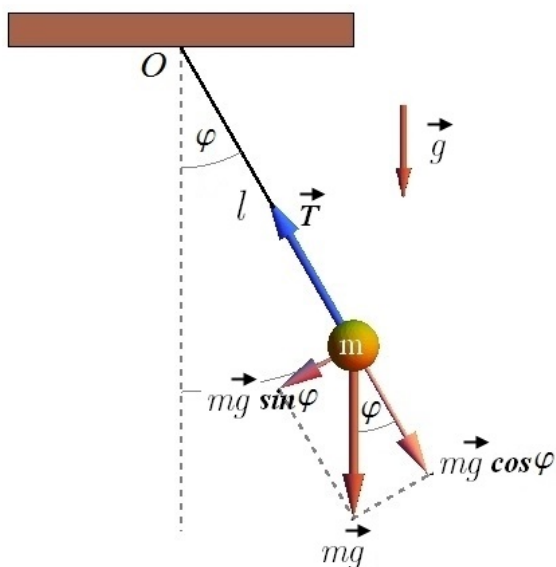
$$\rho_t = \rho_0 \frac{m_t}{m_1 - m_2}.$$

# 4 Merenje ubrzanja Zemljine teže matematičkim klatnom

---

## 4.1 Matematičko klatno

Matematičko klatno čini materijalna tačka mase  $m$  koja je u homogenom gravitacionom polju (npr polju Zemljine teže) obešena o nepokretnu tačku preko neistegljive idealno savitljive niti dužine  $l$  i zanemarljive mase - slika 4.1. Ravnotežni položaj materijalne tačke je vertikalno ispod tačke vešanja.



Slika 4.1 Shematski prikaz matematičkog klatna.

Matematičko klatno je idealizacija koja se u praksi približno realizuje tako što se mala i teška kuglica okači o lak i malo istegljiv konac.

Kada se kuglica izvede iz ravnotežnog položaja, nit zategne i kuglica pusti bez početne brzine, klatno počne da osciluje u vertikalnoj ravni određenoj početnim i ravnotežnim položajem niti. Položaj klatna pratimo preko ugla  $\varphi$  koji nit zaklapa sa vertikalom i koji merimo u smeru suprotnom od kazaljke na satu.

Kretanje kuglice pri navedenom načinu pobudjivanja oscilacija je opisano jednačinom

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T},$$

gde je  $\vec{T}$  sila zatezanja niti koja je usmerena od kuglice ka tački vešanja; otpor vazduha je zanemaren. Projekcija ove jednačine na pravac tangente daje jednačinu kretanja

$$ml\ddot{\varphi} = -mgsin\varphi,$$

odnosno

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (4.1)$$

koja se pri tzv **malim oscilacijama** kada je ugao  $\varphi$  mali, te je  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,<sup>1</sup> svodi na jednačinu linearnog harmonijskog oscilovanja

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad (4.2)$$

sa kružnom učestanošću

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

odnosno periodom

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.3)$$

<sup>1</sup> Ovo vredi za ugao  $\varphi$  izražen u radijanima.



### Merenje ubrzanja Zemljine teže

Merenjem perioda  $T$  u funkciji dužine  $l$  matematičkog klatna se dobijaju eksperimentalni podaci u skladu sa funkcionalnom zavisnošću

$$T = \left( \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \right) \sqrt{l}, \quad (4.4)$$

po kojoj je period linearna funkcija kvadratnog korena dužine matematičkog klatna

$$T = k\sqrt{l}.$$

Nagib ove linearne zavisnosti je

$$k = \frac{2\pi}{\sqrt{g}},$$

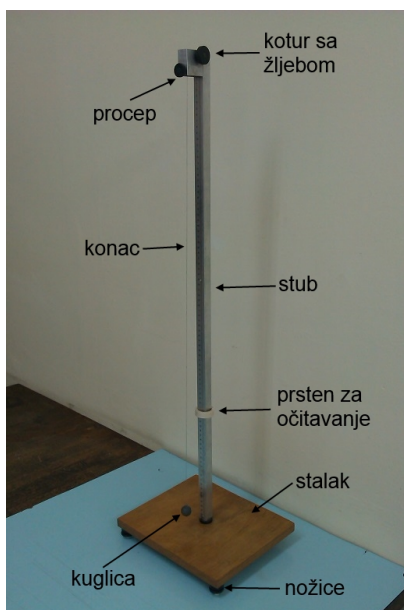
što se može iskoristiti za merenje ubrzanja Zemljine teže  $g$  tako što se na osnovu izmerenih parova  $\{(l_1, T_1), (l_2, T_2), \dots, (l_n, T_n)\}$  nacrtá grafik  $T = f(\sqrt{l})$ , nadje prava koja najbolje fituje tako predstavljene eksperimentalne podatke, pa se iz nagiba  $k$  te prave izračuna  $g$  po formuli

$$g = \frac{4\pi^2}{k^2}.$$

### Aparatura

Na slici je prikazano matematičko klatno koje se koristi za merenje ubrzanja Zemljine teže u studentskoj laboratoriji. Uredjaj se sastoji od stalka na čijem se vrhu nalazi kotur sa žljebom oko kojeg je namotan konac koji prolazi kroz procep između dve pločice. O donji kraj konca je okačena olovna kuglica. Dužina klatna se može menjati odvrtnjem/zavrtnjem kotura. Nakon što se izabere željna dužina klatna, ona se fiksira tako što se konac stegne procepom zavrtnjem zavrtnja uz procep. Na stalku se nalazi metarska traka za merenje dužine klatna. Da bi se izbegla paralaksa pri očitavanju dužine klatna na stalku je montiran prsten.

Merenje vremena se vrši hronometrom (mehaničkim ili digitalnim).



**Slika 4.2** Realizacija matematičkog klatna koja se koristi u studentskoj laboratoriji. Širina procepa se kontroliše zavrtnjem. Tokom merenja konac mora biti stegnut procepom.

### Postupak merenja

- . Odabere se dužina matematičkog klatna.
- . Odabrana dužina klatna, tj rastojanje centra kuglice od tačke vešanja, se meri tako što se od tačke vešanja izmeri rastojanje  $l_g$  gornjeg kraja kuglice i rastojanje  $l_d$  donjeg kraja kuglice.
- . Meri se period za odabranu dužinu matematičkog klatna; u tu svrhu, kuglica se izvede iz ravnotežnog položaja za ugao manji od  $5^\circ$  i pusti bez početne brzine. Konac ne sme biti labav. Meri se trajanje ne jedne već  $n$ , npr  $n = 20$ , oscilacija i to ne jednom već  $k \geq 3$  puta. Tako se dobija rezultat serije merenja  $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ , gde je  $t_i$  trajanje  $n$  oscilacija izmereno u  $i$ -tom merenju.
- . Merenje perioda izvršiti za nekoliko (6-8) dužina matematičkog klatna.

Rezultati merenja se upisuju u tabelu sa sledećim zaglavljem:

$N^{\circ}$	$\frac{l_g}{[\text{cm}]}$	$\frac{l_d}{[\text{cm}]}$	$\frac{l}{[\text{cm}]}$	$\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{[\text{cm}]}}$	$\frac{t_i}{[\text{s}]}$	$\frac{t}{[\text{s}]}$	$\frac{\Delta t}{[\text{s}]}$	$\frac{T}{[\text{s}]}$	$\frac{\Delta T}{[\text{s}]}$
1									

Okrenuti laboratorijski dnevnik za  $90^{\circ}$  i nacrtati tabelu za 8 dužina klatna na celom listu dnevnika u pejzaž orijentaciji.

### Obrada rezultata merenja

- O1). Dužina klatna se izračunava kao aritmetička sredina za  $l_g$  i  $l_d$ :

$$l = \frac{l_g + l_d}{2}.$$

Odavde je  $\Delta l = (\Delta l_g + \Delta l_d)/2 = 1 \text{ mm}$ .

- O2). Srednje trajanje  $n$  oscilacija je

$$t = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_k}{k}$$

- O3). Greški svakog pojedinačnog merenja doprinosi procenjena greška  $\Delta t_r$  usled nereproducibilnosti refleksa (npr 0,1 s) i greška izgradnje hronometra  $\Delta t_g$  (za mehanički hronometar je  $\Delta t_g = 0,1 \text{ s}$ , a za digitalni je  $\Delta t_g = 0,01 \text{ s}$ ). Može se smatrati da se ove dve greške kombinuju kvadratno tj da je ukupna greška pojedinačnog merenja

$$\Delta t_s = \sqrt{\Delta t_r^2 + \Delta t_g^2}.$$

Greška pojedinačnog merenja se uzima da je ista za sva merenja.

- O4). Greška trajanja  $n$  oscilacija se određuje tako što se nadje maksimalna apsolutna devijacija od  $t$ :  $\Delta t_{max} = \max\{|t_1 - t|, |t_2 - t|, \dots, |t_k - t|\}$ . Za konačnu grešku za  $t$  se uzima  $\Delta t = \max\{\Delta t_{max}, \Delta t_s\}$ .
- O5). Period i njegova greška se izračunavaju po formulama

$$T = \frac{t}{n}, \quad \Delta T = \frac{\Delta t}{n},$$

i ove vrednosti se navode u tabeli u zagradama. Zatim se izračunata greška  $\Delta T$  majorira (maksimizira), te se na kraju sračunato  $T$  zakruži na korektan broj cifara na osnovu  $\Delta T$ .

- O6). Crta se grafik perioda u funkciji kvadratnog korena dužine matematičkog klatna.
- O7). Grafičkom metodom se povuče najbolja prava i odredi njen koeficijent pravca  $k$ . U tu svrhu se na najboljoj pravoj izabere tačka A između prve i druge eksperimentalne tačke, kao i tačka B između pretposlednje i poslednje eksperimentalne tačke. Tačke A i B izabiraju tako da je greška očitavanja što manja. Koristeći oznaku  $x$  umesto  $\sqrt{l}$  i  $y$  umesto  $T$  formula za koeficijent pravca (nagib) glasi:

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A},$$

gde su  $(x_A, y_A)$  i  $(x_B, y_B)$  očitane vrednosti koordinata za izabrane tačke A i B. Greška za nagib se računa po formuli

$$\Delta k = \frac{\Delta y_A + \Delta y_B}{|y_A - y_B|} + \frac{\Delta x_A + \Delta x_B}{|x_A - x_B|}.$$

Greška  $\Delta x_A$  se procenjuje ovako: nadju se greške po  $x$ -osi dvaju eksperimentalnih tačaka izmedju koji leži tačka A, uzme se veća od njih i kvadratno sabere sa greškom očitavanja vrednosti  $x_A$  (ako tačka A leži na nekoj liniji milimetarske mreže može se uzeti da je greška očitavanja nula, inače je pola najmanjeg podeoka). Anologno se nalaze i  $\Delta x_B$ , kao i greške po  $y$ -osi:  $\Delta y_A$  i  $\Delta y_B$ .

Napomena: Relativna greška po  $x$ -osi je zbog  $x = \sqrt{l}$  jednaka  $\delta x = \delta l/2$ , odakle je  $\Delta x = |x|\delta x = \Delta l/(2\sqrt{l})$ .

O8). Sračunati  $g$  i njegovu relativnu grešku po formulama

$$g = \frac{4\pi^2}{k^2}, \quad \frac{\Delta g}{g} = 2 \frac{\Delta k}{k},$$

pa iz relativne greške  $\delta g = \Delta g/g$  izračunati apsolutnu grešku za  $g$ , majorirati je i zakoružiti rezultat merenja u skladu sa nadjenom apsolutnom greškom.

O9). Sračunati običnim metodom najmanjih kvadrata nagib i odsečak najbolje prave i ucrtati je isprekidanom linijom na grafik. Ponoviti postupak izračunavanja  $g$  sa nagibom određenim metodom najmanjih kvadrata i uporediti rezultate grafičkog metoda i metoda najmanjih kvadrata.

# 5 Odredjivanje modula elastičnosti

---

## 5.1 Uvod

### Spoljašnje sile i naponi

Sva tela se pod dejstvom spoljašnjih sila deformišu, tj menjaju svoje dimenzije i/ili oblik. Sa izuzetkom gravitacione sile koja deluje po celoj zapremini tela, ostale spoljašnje sile koje razmatramo u mehanici deluju samo po površini tela. Ovakve sile ne deluju u jednoj tački površine već su "razmazane" po nekom delu površine tela na koje deluju.<sup>1</sup> Stoga se kao karakteristična veličina uzima **napon**

$$\vec{\tau} \equiv \frac{d\vec{F}}{dS},$$

tj sila po jedinici površine na koju ta sila deluje. Jedinica za napon je paskal, tj

$$[\tau] = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

i ista je kao i jedinica za pritisak.

Veoma mali delić površine tela se u prvoj aproksimaciji može smatrati **ravnim**, tj kao da je reč o veoma malom delu neke ravni. Jedinični vektor  $\vec{n}$  normalan na ravan delića i usmeren ka spoljašnjosti tela se naziva **jediničnim vektorom normale**.

Napon  $\vec{\tau}$  duž normale  $\vec{n}$  se naziva **normalni napon**. Za njega je  $\vec{\tau} = \tau\vec{n}$ , gde je skalar  $\tau$  intenzitet normalnog napona. U literaturi se, međjutim, intenzitet normalnog napona znatno češće označava sa  $\sigma$  i mi ćemo se pridržavati ove notacije u nastavku teksta. Ako je  $\vec{\tau}$  istog smera kao  $\vec{n}$ , tj  $\sigma > 0$ , onda ovakav normalni napon nastoji da poveća (izduži) telo u pravcu svog delovanja. Ako je pak  $\sigma < 0$ , onda se često umesto normalnog napona posmatra **pritisak**  $p = -\sigma$ . Tada je  $\vec{\tau} = -p\vec{n}$  i ovakav normalni napon nastoji da sabije telo.

<sup>1</sup> Samo ako je površina na koju deluje spoljašnja sila mala u odnosu na dimenzije tela možemo aproksimativno smatrati da sila deluje u jednoj tački.

Napon  $\vec{\tau}$  normalan na  $\vec{n}$ , tj napon koji leži u ravni delića na koji deluje, se naziva **tangencijalni napon** ili **napon smicanja** i on prvenstveno dovodi do promene oblika tela (i tek posredno do promene dimenzije tela).

U opštem slučaju vektor napona  $\vec{\tau}$  može imati proizvoljnu orijentaciju u odnosu na površinu delića. Ovaj vektor možemo uvek rastaviti na njegovu tangencijalnu i normalnu komponentu, tj predstaviti ga kao zbir

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{\parallel} + \vec{\tau}_{\perp},$$

tangencijalnog napona  $\vec{\tau}_{\parallel}$  i normalnog napona  $\vec{\tau}_{\perp}$ .

Kada znamo raspodelu napona po nekoj površini  $S$  onda je ukupna sila nastala takvom raspodelom napona

$$\vec{F} = \int_S d\vec{F} = \int_S \vec{\tau} dS,$$

gde se integracija vrši po posmatranoj površi  $S$ . Ako je  $O$  izabrani pol u odnosu na kojeg računamo moment sila,<sup>2</sup> onda je ukupni moment sila stvorenih dejstvom napona  $\vec{\tau}$  raspodeljenih po površi  $S$  dat sa

$$\vec{M}^{(O)} = \int_S d\vec{M} = \int_S \vec{r}^{(O)} \times d\vec{F} = \int_S \vec{r}^{(O)} \times \vec{\tau} dS,$$

gde je  $\vec{r}^{(O)}$  vektor položaja tačke integracije u odnosu na pol  $O$ . Odavde se vidi da su rezultujuća sila i rezultujući moment spoljašnjih površinskih sila na telo dati izrazima

$$\vec{F}_{res} = \oint_S \vec{\tau} dS, \quad \vec{M}^{(O)} = \oint_S \vec{r}^{(O)} \times \vec{\tau} dS,$$

gde se  $\vec{\tau}$  odnosi na **ukupni** napon površinskih tela i gde se integracija vrši po celoj površini tela na šta ukazuje oznaka  $\oint$  sa kružićem na oznaci za integral.

## Deformacije

Zamislimo da smo čvrsto telo izdelili, ne bukvalno već samo u mislima, na veoma male deliće. Neka na telo ne deluju nikakve spoljašnje sile i neka ono miruje (u laboratorijskom sistemu reference). Pri ovakvim uslovima svi delići tela zauzimaju svoje ravnotežne položaje određene silama između delića, a za samo telo kažemo da je **nedeformisano**.

Ako na isto telo primenimo spoljašnje sile menja se i raspodela unutrašnjih sila zbog čega delići nastoje da predju u nove ravnotežne položaje pa se njihov uzajmni položaj menja. Promena uzajmnog položaja delića predstavlja **lokalnu**

<sup>2</sup> Za pol se obično uzima centar površine  $S$ , tj ona tačka površine za koju je  $\int_S \vec{r} dS = \vec{0}$ .

**deformaciju** tela. Usled lokalnih deformacija, telo kao celina menja svoje dimenzije i/ili svoj oblik te za njega kažemo da je **deformisano**.

Deformacije tela zavise od raspodele napona koji se uvek javljaju u telu kada na njega deluju spoljašnje sile. Ovde ćemo se ograničiti na analizu deformacija u telima koja se nalaze u stanju ravnoteže, tj kada su rezultujuća spoljašnja sila i rezultujući moment spoljašnjih sila na telo jednaki nuli, telo miruje i svi njegovi delovi imaju istu konstantnu temperaturu.

### Istezanje (dilatacija) i Hukov zakon

Jedan od mogućih vidova deformacije tela je istezanje. Ako se npr ispravljena žica zategne tako što na jedan njen kraj deluje sila  $\vec{F}$  duž pravca žice a na drugi kraj suprotna sila  $-\vec{F}$  žica će se istegnuti, tj njena dužina  $L$  će biti veća od dužine  $L_0$  slobodne žice. Pri malim silama istezanje  $\Delta L \equiv L - L_0$  je proporcionalno primenjenoj sili  $F$ , tj vredi **Hukov zakon**  $\Delta L \sim F$ .<sup>3</sup>

Uočimo delić na desnom kraju istegnute žice. Na slobodni (desni) kraj ovog delića deluje spoljašnja sila  $F$  a na suprotni (levi) kraj susedni delić silom  $F'$  koja uravnotežava silu  $F$ . To implicira da na desni kraj susednog delića deluje sila jednaka primenjenoj spoljašnjoj sili  $F$ , jedino što sada ovo nije spoljašnja sila već sila kojom krajnje desni delić deluje na njega. Ali i susedni delić je u ravnoteži. Na njega deluje njegov levi sused silom koja uravnotežava  $F$ , i tako redom.

Iz prethodnog zaključujemo da se u svakom poprečnom preseku žice javlja sila jednaka po intenzitetu spoljašnjoj sili  $F$ . Na površinu poprečnog preseka čija je normala usmerena ka desnom kraju žice možemo smatrati da deluje baš sila  $\vec{F}$  (što odgovara situaciji da je ova površina granična površina delića koji se nalazi sa njene leve strane), dok se na **ist**u površinu, ali sa suprotno (tj ulevo) usmerenom normalom, može smatrati da deluje sila  $-\vec{F}$  (jer bi ovako usmerena površina bila granična površina delića sa njene desne strane).

Predpostavimo da je napon u svim tačkama desnog kraja žice isti, tj  $\sigma = F/S$ , i analogno za levi kraj. Uočimo bilo koji delić žice; neka je u nedeformisanom stanju njegova dužina  $l_0$ , a u deformisanom stanju  $l$ , tako da je  $\Delta l = l - l_0$

<sup>3</sup> Robert Hooke (1635-1703) britanski fizičar, matematičar i izumitelj - jedan od najsvestranijih naučnika svog vremena. Od njega potiče naziv *ćelija* u biologiji, poboljšao je mikroskop, konstruisao vazdušne pumpe, uveo zapinjač i spiralnu oprugu u satni mehanizam, postavio kinetičku hipotezu gasova, predložio je temperaturu topljenja leda za nulu termometarske skale, pokazao da se centar mase Zemlje i Meseca kreće po elipsi oko Sunca, utvrdio da se tela šire pri povećanju temperature, pronašao metod određivanja geografske dužine, otkrio razliku između venske i arterijske krvi, merio rastojanja do zvezda...



istežanje delića. Na desni kraj uočenog delića deluje sila  $\vec{F}$ , a na levi sila  $-\vec{F}$ . Normalni napon koji se pritom javlja je po intenzitetu jednak  $\sigma = F/S$  kao i na krajevima žice. Smatrajući da je žica homogena i da smo je (misaono) izdelili na  $N$  delića jednake dužine  $l_0 = L_0/N$ , a obzirom da je ukupno istežanje (cele) žice zbir istežanja njenih delića, zaključujemo da su relativna istežanja cele žice i svakog njenog delića ista, tj  $\Delta L/L_0 = \Delta l/l_0$ . Količnik istežanja  $\Delta l$  i dužine  $l_0$  nedeformisanog delića, tj njegovo relativno istežanje

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0},$$

se naziva **relativnom deformacijom** delića. Kao i svaka druga karakteristika delića ova veličina je lokalna.

Sa druge strane nije svejedno da li je sila kojom istežemo žicu primenjena na debelu ili tanku žicu. Debela žica ima manje relativno istežanje, tačnije ista sila izaziva onoliko puta veće relativno istežanje koliko puta je manja površina poprečnog preseka. Tako stižemo do preciznije formulacije Hukovog zakona:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

koji kaže da je u svakoj tački tela normalni napon  $\sigma$  proporcionalan relativnoj deformaciji  $\varepsilon$ . Konstanta proporcionalnosti

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon},$$

se naziva **Jangov modul elastičnosti**.<sup>4</sup> Obzirom da je relativna deformacija bezdimenzionalna veličina, Jangov modul elastičnosti ima dimenziju napona te je njegova SI jedinica paskal:

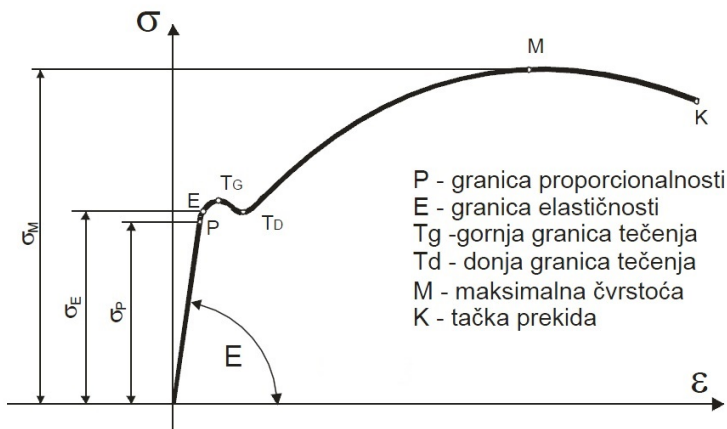
$$[E] = \text{Pa}.$$

Jangov modul elastičnosti je karakteristika materijala koja ne zavisi ni od napona ni od relativne deformacije već od ostalih parametara stanja materijala, na prvom mestu od njegove temperature.

### Dijagram normalnog napona i relativnog istežanja

Hukov zakon važi samo za male relativne deformacije. Pri većim relativnim deformacijama veza između normalnog napona  $\sigma$  i relativne deformacije  $\varepsilon$  postaje nelinearna i njen tipičan tok je dat na slici 5.1.

<sup>4</sup> Thomas Young (1773-1829) je britanski fizičar, fiziolog i egiptolog poznat i po svojoj talasnoj teoriji svetlosti, interferenciji svetlosti na 2 otvora, teoriji vidjenja posredstvom 3 osnovne boje, ali i po naporima na prvom dešifrovanju egipatskih hijeroglifa u čemu ga je pretekao Žan-Fransoa Šampolion.



**Slika 5.1** Dijagram normalnog napona  $\sigma$  u funkciji relativnog istežanja  $\varepsilon$ .

Kao što se sa slike vidi, linearna zavisnost napona  $\sigma$  od relativnog istežanja  $\varepsilon$  vredi u oblasti malih relativnih istežanja (npr manjih od 0,1%) do tačke P - tzv **granice proporcionalnosti**, tj za napone manje od napona  $\sigma_P$  koji se naziva **napon na granici proporcionalnosti**.

U oblasti malih deformacija zaključno sa tačkom E telo se po prestanku dejstva sila istežanja vraća u prvobitno stanje te za deformacije u ovoj oblasti kažemo da su **elastične**, dok za defomacije zaključno sa tačkom P kažemo da su **linearne i elastične**.

U oblasti izmedju tačke P i **granice elastičnosti** - tačke E, odnosno izmedju napona  $\sigma_P$  i **napona na granici elastičnosti**  $\sigma_E$ , veza izmedju napona i deformacije više nije linearna, ali su deformacije i dalje **elastične**.

U oblasti nakon tačke E deformacije su **plastične** - tj nakon prestanka dejstva sila istežanja telo se **ne vraća** u prvobitno stanje već **ostaje delimično deformisano**.

Prelaskom **gornje granice tečenja**  $T_G$  telo prestaje da daje otpor istežanju. Istežanje raste samo od sebe a napon pada sve dok telo ne dodje na **gornju granicu tečenja** - tačku  $T_D$ .

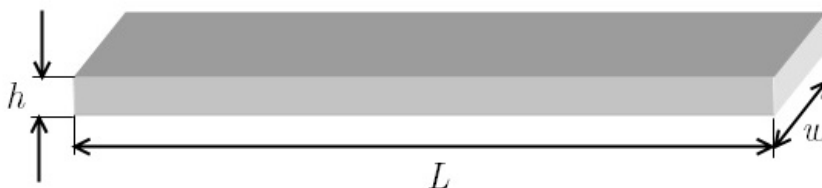
Oblast izmedju tačaka  $T_G$  i  $T_D$  je oblast **očvršćavanja**. U njoj se napon povećava pri povećanju istežanja.

Tačka M opisuje stanje **maksimalne čvrstoće** materijala. Iza nje istežanje samo od sebe raste, napon pada i telo se kida u tački K.

### Savijanje ploče

Savijanje elastične ploče je jedan od mogućih vidova njenih deformacija. U izlaganju koje sledi ćemo se ograničiti na **mala** savijanja pri kojima se javljaju linearne i elastične deformacije.

Neka nedeformisana **tanka** ploča (ljuska, traka) ima oblik kvadra dužine  $L$ , visine  $h$  i širine  $w$  ( $h \ll w < L$ ) - slika 5.2.

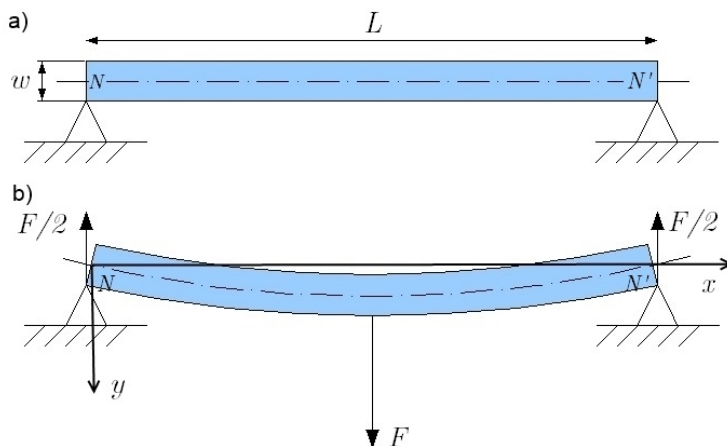


**Slika 5.2** Nedeformisana ploča.

Neka je ta ploča postavljena na dva oslonca kao na slici 5.3a i neka na njenoj sredini deluje sila  $F$  usmerena vertikalno naniže. Pod dejstvom ove sile ploča se savija - vidi sliku 5.3b. I pre i posle deformacije situacija u svim vertikalnim presecima ploče paralelnim dužini ploče je **ista**, te se potpuna slika "dešavanja" unutar ploče "projektuje" na ravan crteža. Drugim rečima, ploča se ponaša kao da je dvodimenzionalno telo i verno je predstavljena svojom projekcijom na ravan crteža. Horizontalne duži paralelne širini ploče (one se u projekciji vide kao tačke) se ne deformišu već ostaju horizontalne i paralelne širini ploče. Horizontalne duži paralelne dužini ploče se krive. Sve te duži menjaju dužinu, osim duži iz ravni simetrije koje se samo krive ne menjajući dužinu. Ovakve duži obrazuju *neutralnu površ* i na crtežu se sve projektuju na liniju  $NN'$  za koju kažemo da je *neutralna*. Konačno, duži paralelne visini ploče ne menjaju dužinu, ali menjaju pravac ostajući normalne na (iskrivljenu) neutralnu liniju.

Uvedimo koordinatu  $x$  duž neutralne linije pre savijanja,  $y$  koordinatu usmerimo duž sile  $F$ , a koordinatni početak postavimo u tačku  $N$  - slika 5.3b. U ovom sistemu koordinata je pri malim deformacijama neutralna linija data izrazom

$$y(x) = \frac{Fx}{48EI} (3L^2 - 4x^2) , \quad (5.1)$$



**Slika 5.3** Ploča oslonjena na 2 oslonca. Na sredini ploče deluje sila  $F$ .

gde je

$$I = \frac{1}{12}wh^3 \quad (5.2)$$

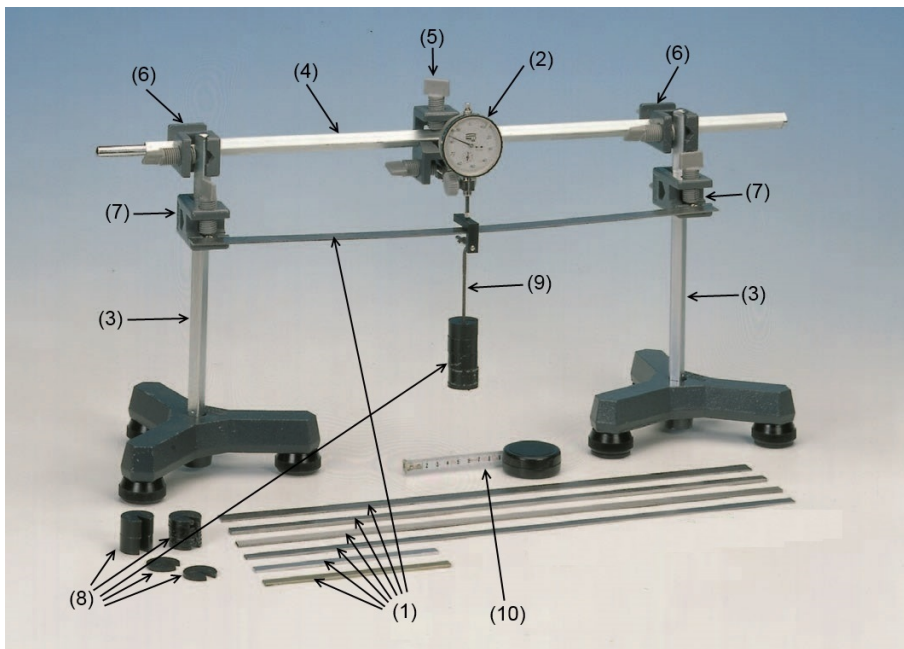
**aksijalni moment inercije poprečnog preseka** pravougaone ploče. Odavde je **izgib**  $\lambda$ , tj savijanje ploče na njenoj sredini gde je  $x = L/2$ , dat izrazom

$$\lambda = \frac{FL^3}{48EI}, \quad (5.3)$$

što se može iskoristiti za merenje modula elastičnosti.

## 5.2 Opis aparature

Aparatura (slika 5.4) za određivanje modula elastičnosti se sastoji iz: (1) - nekoliko uzoraka ploča različitih veličina i od različitih materijala; (2) - komparatora, tj instrumenta za merenje pomeranja (opseg 10 mm, tačnost i rezolucija 0,01 mm); (3) - dva postolja sa nosačima; (4) - horizontalne konzole; (5) - stege u koju se postavlja komparator; (6) - stega za pričvršćivanje konzole; (7) - stega za oslanjanje uzorka; (8) - seta od dve vrste tegova od po 50 g i 10 g; (9) - nosača tegova; (10) - metarske trake.



**Slika 5.4** Aparatura za određivanje modula elastičnosti.

Uz to koristićemo: digitalnu vagu (opseg 610 g, rezolucija 0,01 g, tačnost 0,02 g) za kalibraciju komparatora, kao i lenjir sa nonijusom i libelu za podešavanje postavke aparature; ovi uređaji nisu prikazani na slici 5.4.

### 5.3 Zadatak

1. Uz pomoć libele postaviti nosače ploče tako kada se ploča postavi bude horizontalna; u tu svrhu podesiti visinu nosača tako da libela postavljena na njihovu gornju površinu pored zavrtnja nosača bude horizontalna.
2. Na sličan način postaviti nosač komparatora u horizontalan položaj.
3. Postaviti komparator na nosač komparatora tako da bude na sredini između dva stativa.
4. **Kalibrisati komparator;** ovo se radi uz pomoć digitalne vage centigramske tačnosti, vidi sliku 5.5, tako što se komparator sabije da pokazuje oko 5 mm a da njegov vrh upire u centar tase vage. Zatim se komparator pomoću zavrtnja (1) postepeno podiže u odnosu na tas kojom prilikom se njegovo očitavanje smanjuje. Pri svakom položaju komparatora u odnosu na tas se sačeka da se pokazivanje vage smiri pa se izvrši očitavanje pokazivanja komparatora i vage. Pošto vaga daje masu u gramima, vrednost sile (kojom komparator pritiska tas vage) izražena u njutnima se dobija množenjem mase sa  $g = 9,806 \times 10^{-3} \text{ N/g}$ .



**Slika 5.5** Kalibracija komparatora uz pomoć digitalne vage. (1) - zavrtnj za podešavanje visine komparatora.

- a) Izmeriti pokazivanje komparatora  $s$  pri najmanje 6 vrednosti sile komparatora  $F_k$ ; izmerene vrednosti uneti u tabelu sa zaglavljem

Nº	$s$ [mm]	$F_k$ [N]
1		

- b) Nacrtati grafik zavisnosti sile komparatora  $F_k$  u funkciji pokazivanja komparatora  $s$ .
  - c) Nacrtati pravu liniju  $F_k = ks + F_{st}$  koja najbolje fituje eksperimentalne podatke; odsečak  $F_{st}$  ove prave na ordinatnoj osi daje silu statičkog trenja komparatora, a nagib  $k$  osetljivost komparatora.
  - d) Odrediti grafičkom metodom  $k$  i  $F_k$  i proceniti njihove apsolutne greške.
5. Izmeriti metarskom trakom rastojanje  $L$  između bližih krajeva nosača ploče; ovi krajevi su oslonci za ploču. Proceniti grešku za  $L$ .
6. Izmeriti dimenzije ploče, izabrane od strane nastavnika. Na po 5 različitih pozicija izmeriti širinu ploče  $w$  lenjirom sa nonijusom i visinu ploče  $h$  mikrometarskim zavrtanjem. Podatke uneti u tabelu

Nº	1	2	3	4	5	sr. vrednost
$w$ [mm]						
$h$ [mm]						

Iz ovih podataka izračunati srednju širinu i srednju visinu ploče, proceniti njihove greške i uneti ih u tabelu.

7. Izračunati aksijalni moment inercije  $I = \frac{1}{12}wh^3$  poprečnog preseka ploče za osu duž visine ploče i proceniti njegovu grešku. Relativna greška za  $I$  je data sa

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta w}{w} + 3\frac{\Delta h}{h}.$$

8. Postaviti ploču simetrično na njene nosače.
9. Postaviti nosač tegova na **sredinu** ploče i na njega **postepeno** dodati onoliko tegova da izgib ne bude veći od 5 mm.
10. Postaviti komparator tako da njegov vrh leži na sredini gornjeg kraja nosača tegova i da je usmeren ka centru ploče; pri ovom početnom i maksimalnom opterećenju ploče tegovima mase  $m_0$  očitati pokazivanje komparatora  $s_0$ .

11. Postepeno smanjivati masu tegova na nosaču do iznosa od 50 g; očitati pokazivanje komparatora  $s$  u funkciji oduzete mase  $m' = m_0 - m$ , gde je  $m$  tekuće opterećenje ploče. Očitavanje vršiti 30 s nakon promene mase tegova. Očitane vrednosti uneti u tabelu sa zaglavljem

N <sup>o</sup>	$m'$ [g]	$s$ [mm]
1		

12. Nacrtati grafik zavisnosti pokazivanja komparatora  $s$  u funkciji oduzete mase tegova  $m'$ .
13. Odrediti pravu  $s = a + bm'$  koja najbolje fituje eksperimentalne podatke i ucrtati je na grafik.
14. Grafičkom metodom odrediti koeficijent pravca (nagib)  $b \pm \Delta b$  ove prave.
15. Odrediti modul elastičnosti  $E$  materijala od kojeg je ploča. Izgib ploče  $\lambda$  je dat formulom

$$\lambda = \frac{L^3}{48EI} F = KF,$$

gde je  $F$  sila koja deluje na sredini ploče (tačnije, na uskom segmentu ploče jednako udaljenom od oba oslonca), dok je

$$K = \frac{L^3}{48EI}.$$

Sila  $F$  je oblika

$$F = mg + W + F_k,$$

gde je  $m$  masa tegova,  $W$  je težina nosača tegova, dok je  $F_k$  sila kojom komparator odozgo pritiska nosač tegova, a samim tim i ploču. Kako je  $F_k = ks + F_{st}$ , to je

$$F = (W + F_{st}) + gm + ks = F_0 + gm + ks,$$

gde je  $F_0 = W + F_{st}$ . Sa druge strane, očitavanje komparatora  $s$  i izgib ploče su vezani relacijom

$$\lambda_0 + s_0 = \lambda + s,$$

u kojoj su  $\lambda_0$  i  $s_0$  izgib ploče i pokazivanje komparatora pri maksimalnoj masi tegova  $m_0$ . Obzirom da je  $\lambda_0 = K(F_0 + gm_0 + ks_0)$ , odavde nalazimo:

$$K(F_0 + gm_0 + ks_0) + s_0 = K(F_0 + gm_0 + ks) + s,$$



odakle je

$$s = s_0 + \frac{gK}{1 + kK} m',$$

tj  $s$  je linearna funkcija  $s = a + bm'$  oduzete mase tegova  $m' = m_0 - m$ . Nagib ove prave je

$$b = \frac{gK}{1 + kK},$$

odakle je

$$K = \frac{1}{g/b - k}.$$

te je

$$E = \frac{L^3}{48I} (g/b - k),$$

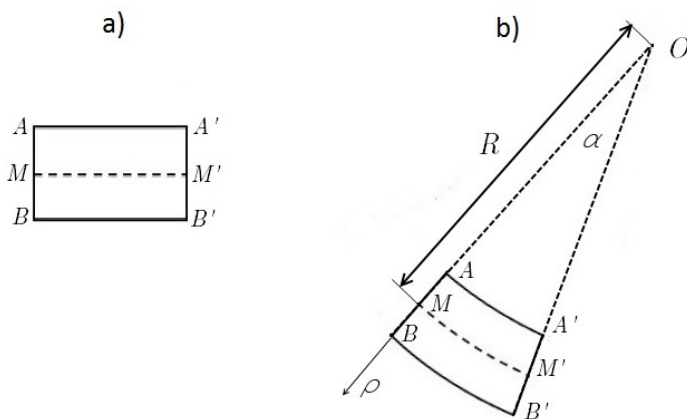
a njegova greška

$$\frac{\Delta E}{E} = 3 \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta I}{I} + \frac{g\Delta b/b^2 + \Delta k}{g/b - k}.$$

## 5.4 Dodatak

### Jednačina neutralne linije

Uočimo pre savijanja delić između dva poprečna preseka ploče  $AB$  i  $A'B'$  – slika 5.6a; rastojanje  $l_0$  između preseka je veoma mala veličina, a  $MM'$  deo neutralne linije između preseka.



Slika 5.6 Delić ploče a) pre savijanja; b) nakon savijanja.

Oblik delića nakon savijanja je dat na slici 5.6b - to je isečak cilindričnog sloja širine  $w$ , visine  $h$ , srednjeg poluprečnika  $R$  i ugla isečka  $\alpha$  ( $\alpha$  je mali ugao); centar sloja je tačka  $O$ . Uočimo da je  $R$  poluprečnik, a  $O$  centar **krivine** za segment  $MM'$  neutralne linije. Vredi  $l_0 = R\alpha$  jer je luk  $MM'$  deo neutralne linije.

Uvedimo u ravni poprečnog preseka  $AB$  koordinatu  $\rho$  duž radijusa od  $M$  ka  $B$ ; tački  $A$  odgovara  $\rho = -h/2$ , tački  $M$  odgovara  $\rho = 0$ , a tački  $B$  odgovara  $\rho = +h/2$ . Uočimo pre savijanja duž sa koordinatom  $\rho$ , paralelnu neutralnoj liniji; njena dužina je  $l_0$ . Nakon savijanja ova duž postaje luk poluprečnika  $R + \rho$  i dužine  $l = (R + \rho)\alpha$  obzirom da se  $\rho$  usled savijanja ne menja. Stoga je  $\Delta l = l - l_0 = \rho\alpha$  apsolutno istezanje, a  $\Delta l/l_0 = \rho/R$  relativno istezanje koje igra ulogu relativne deformacije  $\varepsilon \equiv \Delta l/l_0$ . Stoga se na krajevima linije javlja normalni napon  $\sigma = E\Delta l/l_0 = E\rho/R$ . Prisetimo da je ovaj napon pozitivan za sve linije između neutralne linije i (deformisane) linije  $BB'$  zato što su one izdužene,

a da je za sve linije između neutralne linije i (deformisane) linije AA' napon negativan zato što su ove linije skraćene.

Ukupnu elastičnu silu  $F_e$  na poprečnom preseku  $AB$  nalazimo integracijom napona  $\sigma$  po poprečnom preseku  $AB$

$$F_e = \int \sigma dS = \int_{-h/2}^{h/2} E \frac{\rho}{R} w d\rho = 0. \quad (5.4)$$

Obzirom da je ukupna sila  $F_e$  koju stvaraju elastični naponi na poprečnom preseku ploče  $AB$  jednaka nuli, ukupni moment sile koji stvaraju isti naponi ne zavisi od izbora pola u odnosu na koji se taj moment računa. Tako nalazimo da ukupni moment sile, računat u odnosu na tačku  $M$  na neutralnoj liniji, iznosi

$$M_e = \int \rho \sigma dS = \frac{E}{R} \int \rho^2 dS = \frac{EI}{R},$$

gde je

$$I \equiv \int \rho^2 dS$$

veličina koja se zove **aksijalni (osni) moment inercije površine poprečnog preseka**. Za pravougaoni poprečni presek je

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} \rho^2 w d\rho = \frac{1}{12} wh^3.$$

U  $x$ - $y$  sistemu koordinata, poluprečnik krivine  $R$  je

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}, \quad (5.5)$$

gde su  $y'$  i  $y''$  prvi i drugi izvod po  $x$  jednačine neutralne linije  $y = y(x)$ . Za male deformacije je  $y' \ll 1$ , te je  $R \approx 1/y''$ . Stoga je

$$M_e \approx EI y''. \quad (5.6)$$

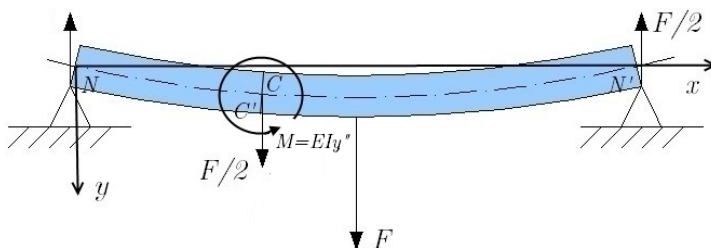
### Profil neutralne linije

Neka je ploča samo oslonjena na nosače i neka nema kontakt sa zavrtnjima. Na dodiru ploče i (svakog) oslonca se javlja neka raspodela napona koja se može zameniti rezultujućom silom (kojom oslonac deluje na ploču) i rezultujućim spregom sila. Pošto je sistem simetričan zaključujemo da rezultujuće sile u osloncima moraju biti jednake a spregovi suprotni. Kako je ploča u ravnoteži suma svih spoljašnjih sila na nju je nula te sile u osloncima  $\vec{F}_o$  moraju biti date sa

$$\vec{F}_o = -\vec{F}/2,$$

gde je  $\vec{F}$  sila kojom je ploča opterećena na sredini između oslonaca. Osim toga, pošto ploča naleže na oslonce samo sa gornje strane nema uslova za pojavu rezultujućeg sprega sila ni na jednom osloncu.

Uočimo poprečni presek  $CC'$  bliži levom osloncu, slika 5.7. Uočimo zatim deo ploče između levog oslonca i poprečnog preseka  $CC'$ . Ovaj deo je u ravnoteži te ukupna spoljašnja sila i ukupni moment spoljašnjih sila na njega moraju biti jednaki nuli. Na levom kraju uočenog dela se javljaju spoljašnje sile usled interakcije sa osloncem koje, kako smo naveli, daju ukupnu silu  $F/2$  usmerenu naviše i nulti spreg sila. Na desni kraj uočenog dela ploče deluje ostatak ploče elastičnim silama i ove sile su za uočeni deo ploče spoljašnje.



**Slika 5.7** Delić ploče a) pre savijanja; b) nakon savijanja.

Jasno je da će ukupna elastična sila na desni kraj uočenog dela ploče iznositi  $F/2$  i biti usmerena naniže, što pokazuje da se u ravni poprečnog preseka javljaju tangencijalne sile smicanja usmerene naniže. Analiza ovih sila nam sada nije od značaja, osim da one, zajedno sa silama na osloncu, stvaraju spreg  $Fx/2$ , gde je  $x$  rastojanje ravni  $CC'$  od oslonca; ovaj spreg nastoji da okrene posmatrani deo ploče u smeru kazaljke na satu.

Ono što nam je ovde bitno je da elastične sile na desnom kraju stvaraju spreg sila  $M_e = EIy''$  koji uravnotežava navedeni spreg  $Fx/2$  i nastoji na okrene ploču u smeru suprotnom od kazaljke na satu (zato što su gornji delovi ploče sabijeni a donji izduženi). Tako nalazimo da je

$$EIy'' = -\frac{Fx}{2}.$$

Integracijom ovog izraza po  $x$  nalazimo

$$y'(x) = -\frac{Fx}{4EI} + y'_0,$$

gde je  $y'_0$  prvi izvod u tački  $x = 0$ . Ovaj izvod ne znamo, ali znamo da zbog simetrije problema prvi izvod mora biti jednak nuli u tački  $x = L/2$ , odakle se nalazi da je  $y'_0 = FL^2/(16EI)$ , odnosno

$$y'(x) = \frac{F}{4EI} \left( \frac{L^2}{4} - x^2 \right).$$

Integracijom  $y'(x)$  po  $x$  nalazimo

$$y(x) = \frac{F}{4EI} \left( \frac{L^2}{4}x - \frac{x^3}{3} \right) + y_0,$$

gde je  $y_0$  savijanje ploče u levom osloncu, tj za  $x = 0$ . Ovo savijanje iznosi  $y_0 = 0$ , te tako nalazimo profil savijanja

$$y(x) = \frac{Fx}{48EI} (3L^2 - 4x^2),$$

a odatle izgib

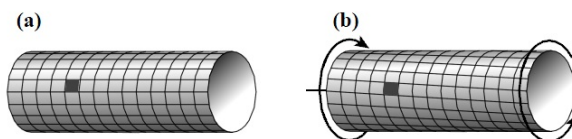
$$\lambda = \frac{FL^3}{48EI},$$

tj savijanje ploče na njenoj sredini gde je  $x = L/2$ .

# 6 Odredjivanje modula torzije

## 6.1 Uvod

Torzija (uvrtanje) je vid deformacije materijala koji se javlja kada se materijal izloži dejstvu dva suprotna momenta sile koji u materijalu izazivaju pojavu tangencijalnih napona, slika 6.1. Usled dejstva tangencijalnih napona menja se ugao izmedju duži koje su pre deformacije bile normalne. Kao mera deformacije se uzima ugao odstupanja  $\theta$  od pravog ugla i ovaj ugao se naziva **ugao smicanja** ili **ugao torzije**.



Slika 6.1 Torzija cillindrične šipke (žice).

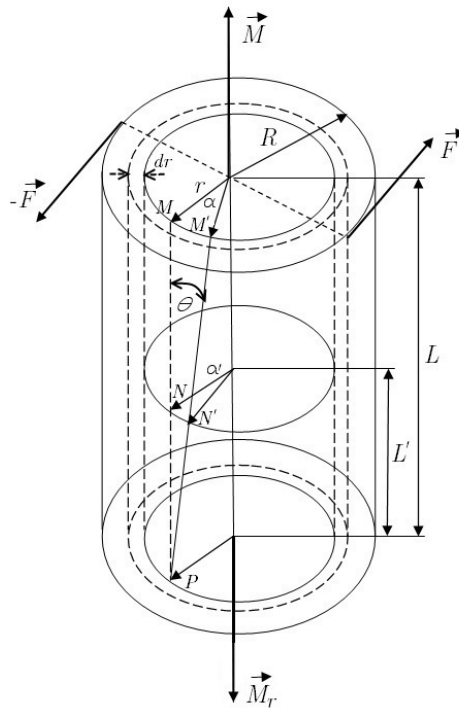
Pri malim deformacijama, tangencijalni napon  $\tau$  i ugao torzije  $\theta$  su povezani **Hukovim zakonom za torziju**:

$$\tau = G\theta, \quad (6.1)$$

gde je  $G$  - modul torzije i gde je ugao  $\theta$  izražen u radijanima. Kako je u oblasti važenja Hukovog zakona veza izmedju napona i deformacije linearna, za takve deformacije kažemo da su **linearne**. Kako se po prestanku dejstva malih napona telo vraća u nedeformisano stanje, to su u oblasti važenja Hukovog zakona deformacije i **elastične**.

Kao i modul elastičnosti, modul torzije  $G$  je karakteristika materijala i zavisi od stanja materijala, na prvom mestu od temperature.

Tipična situacija u kojoj se javlja torzija je uvrtnje cillindrične šipke (žice) pod



**Slika 6.2** Raspodela sile, momenata sile i deformacija pri torziji cilindrične šipke (žice).

dejstvom momenata sile paralelnih osi žice - slika 6.2. Donji kraj žice je učvršćen, dok u ravni poprečnog preseka gornjeg kraja žice deluje spreg **aktivnih** sile  $\vec{F}$  i  $-\vec{F}$  koje stvaraju aktivni moment sile  $M = 2RF$ . U ravnotežnom stanju je aktivni moment sile uravnotežen momentom sile  $M_r$  koji stvaraju reakcije u ležištu na donjem kraju žice.

Uočimo duž  $PM$  paralelnu osi žice na rastojanju  $r$  od ose; tačka  $M$  je na gornjem, a tačka  $P$  na donjem kraju žice. Nakon uvrtnja tačka  $M$  prelazi u položaj  $M'$  dok je tačka  $P$  nepomična. Ugao koji grade duži  $PM$  i  $PM'$  iznosi  $\theta$  i to je **ugao torzije** za posmatranu duž  $PM$ . Ako je žica uvrnuta za ugao  $\alpha$ , onda poteg do tačke  $M$  pre uvrtnja i poteg do tačke  $M'$  nakon uvrtnja grade ugao  $\alpha$  i to vredi za **sve** tačke na gornjem kraju žice. Dužina luka  $\widehat{MM'}$  je (kao dužina svakog luka na kružnici poluprečnika  $r$ ) jednaka  $\alpha r$ , a sa druge strane

ona je približno jednaka dužini stranice  $\overline{MM'}$  trougla  $\triangle PMM'$  jer je ugao  $\theta$  mali. Tako nalazimo da ugao torzije duži paralelnih osi i na rastojanju  $r$  od ose iznosi

$$\theta(r) = \frac{\alpha}{L} r. \quad (6.2)$$

Ovaj ugao linearno raste sa rastojanjem  $r$  i najveći je na omotaču žice, gde iznosi  $\theta(R) = \alpha R/L$ . Iz formule (6.2) se takodje vidi da je ugao torzije  $\theta$  mali čak i za relativno velike uglove uvrtnja  $\alpha$  ako je žica tanka, tj  $R/L \ll 1$ . Pre no što se pozabavimo raspodelom tangencijalnih napona u žici, napomenimo da se ugao uvrtnja menja duž žice. Za sve tačke poprečnog preseka žice na rastojalnju  $L'$  od donjeg kraja (vidi tačke  $N$  i  $N'$  na slici 6.2) on iznosi

$$\alpha'(L') = \frac{L'}{L} \alpha.$$

Tangencijalni napon  $\tau$  nije isti u svim delovima žice već raste sa rastojanjem  $r$  od ose žice. Zaista, za deliće koji se nalaze na rastojanju  $r$  od ose žice, tangencijalni napon  $\tau$  pri uglu uvrtnja  $\alpha$  iznosi

$$\tau(r) = \frac{G\alpha}{L} r, \quad (6.3)$$

što sledi iz (6.1) i (6.2).

Znajući kakva je zavisnost  $\tau(r)$  možemo naći vezu između ugla uvrtnja  $\alpha$  i momenta sile  $M$  koji izaziva ovo uvrtnje. Na deo površine  $dS$  gornjeg kraja žice na rastojanju  $r$  od ose žice deluje elastična sila  $dF_e = \tau dS$ , koja stvara elastični moment  $dM_e = r dF_e$ . Ukupni elastični moment je

$$M_e = \int_S dM_e = \int_S r dF_e = \int_S \frac{G\alpha}{L} r^2 dS,$$

odakle se vidi da se za  $dS$  može uzeti površina elementarnog kružnog prstena  $dS = 2\pi r dr$ , te tako nalazimo

$$M_e = \frac{2\pi G\alpha}{L} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi G\alpha}{2L} R^4 = \frac{\pi G\alpha}{32L} d^4,$$

gde je  $d = 2R$  prečnik žice. Kako u stanju ravnoteže elastični moment sile uravnotežava moment spoljašnjih sila,  $M_e = M$ , iz prethodne formule se vidi da je ugao uvrtnja  $\alpha^\circ$ , izražen u stepenima (a ne radijanima),<sup>1</sup> dat sa

$$\alpha^\circ = \frac{5760}{\pi^2} \cdot \frac{L}{Gd^4} M, \quad (6.4)$$

<sup>1</sup> 1 rad =  $(180/\pi)^\circ \approx 57,2958^\circ \approx 57,3^\circ$ .



gde je  $5760 = 180 \times 32$ .

Formula (6.4) pokazuje da ugao uvrtnja **linearno** zavisi od momenta sile  $M$  koji dovodi do ovog uvrtnja. Koeficijent proporcionalnosti  $b = \alpha^\circ/M$  ove linearne zavisnosti je

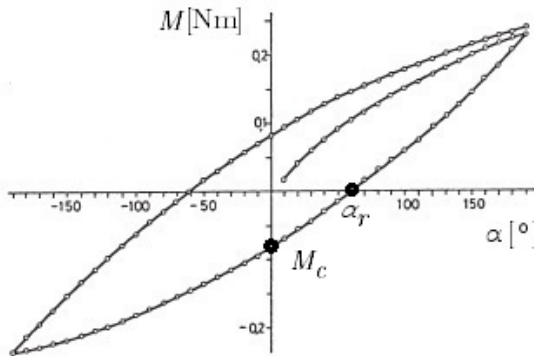
$$b = \frac{5760}{\pi^2} \cdot \frac{L}{Gd^4}, \quad (6.5)$$

odakle nalazimo da je modul torzije

$$G = \frac{5760}{\pi^2} \cdot \frac{L}{bd^4}. \quad (6.6)$$

### Histerezis pri torziji

Ako relativno brzo uvrtnemo žicu do ugla uvrtnja koji je dovoljno veliki da je u spoljašnjim delovima žice prekoračen napon na granici elastičnosti u takvim delovima žice se javljaju plastične deformacije koje ne nestaju čak i ako se napon koji dovodi do deformacije ukloni. Stoga ako počnemo da smanjujemo napon ugao uvrtnja ne stiže da isprati smanjenje napona već **kasni** za njim. Ovo kašnjenje posledice za uzrokom se naziva **histerezis** i prikazano je na slici 6.3 za slučaj uvrtnja čelične žice.



**Slika 6.3** Histerezisna petlja nastala pri torziji čelične žice.

Kriva koja opisuje početno uvrtnje žice od nultog do maksimalno primenjenog napona (tj momenta sile) je kriva inicijalnog naprezanja materijala (ili

devičanska kriva). Deo krive koji se nastavlja na krivu inicijalnog naprezanja i leži ispod nje pokazuje kašnjenje deformacije (date preko ugla uvrtnja žice  $\alpha$ ) za momentom sile  $M$ . Kada moment sile padne na nulu ugao uvrtnja nije nula već ima neku vrednost  $\alpha_r$  koja se naziva **remanentna** deformacija. Da bi ugao uvrtnja pao na nulu mora se u suprotnom smeru primeniti moment sile  $M_c$ , koji se naziva **koercitivni moment**. Dalji tok histerezisne krive odgovara povećanju suprotno usmerenog momenta sile sve dok ugao uvrtnja ne dostigne vrednost početnog ugla uvrtnja, ali je žica uvrtna u suprotnom smeru. Iza toga moment sile slabi, pada na nulu, ponovo raste u prvobitnom smeru dok ne stignemo do početnog ugla uvrtnja. Moment koji dovodi do tog ugla uvrtnja je nešto veći nego moment koji je izazvao istu deformaciju pri inicijalnom naprezanju, tj histerezisna kriva nije odmah zatvorena. Ako bi pak ponavljali prethodno opisane promene momenta sile, kriva bi se nakon nekoliko ciklusa zatvorila. Ovakva zatvorena kriva se naziva **histerezisna petlja**.

Izgled histerezisne petlje zavisi od vrste materijala, njegovog stanja, maksimalno primenjenog napona, brzina promene napona... Može se pokazati i da je površina ograničena histerezisnom petljom proporcionalna toplotnim gubicima, tj toploti koja se oslobadja u materijalu tokom histerezisnog ciklusa.

### Relaksacija materijala pri torziji

Dijagram napon-deformacija povezuje **ravnotežni** napon  $\tau_r$  i **ravnotežni** ugao torzije  $\theta_r$ . Pri konačnim brzinama promene, napon i/ili deformacija ne dostižu odmah svoje ravnotežne vrednosti već im se postepeno približavaju. Ovo se naziva **relaksacijom** materijala.

U oblasti važenja Hukovog zakona relaksacija je dosta brza i zato se pri umerenim brzinama promena ne uočava. U situacijama u kojim se u nekim oblastima materijala javlja i plastična deformacija, relaksacija je znatno sporija i može se eksperimentalno pratiti. Tako npr ako dosta brzo uvrtnemo žicu do ugla uvrtnja pri kojem se javljaju i plastične deformacije i ako nadalje ugao uvrtnja održavamo konstantnim onda se **rezidualni** moment sile

$$M_{res} \equiv M - M_{eq},$$

definisano kao razlika trenutnog momenta sile  $M$  kojim se materijal opire uvrtnju i ravnotežne vrednosti  $M_{eq}$  ovog momenta, menja tokom vremena približno po zakonu

$$\frac{dM_{res}}{dt} \approx -\frac{M_{res}}{T_r}, \quad (6.7)$$

gde je  $T_r$  karakteristično vreme relaksacije materijala. Na osnovu ove jednačine,

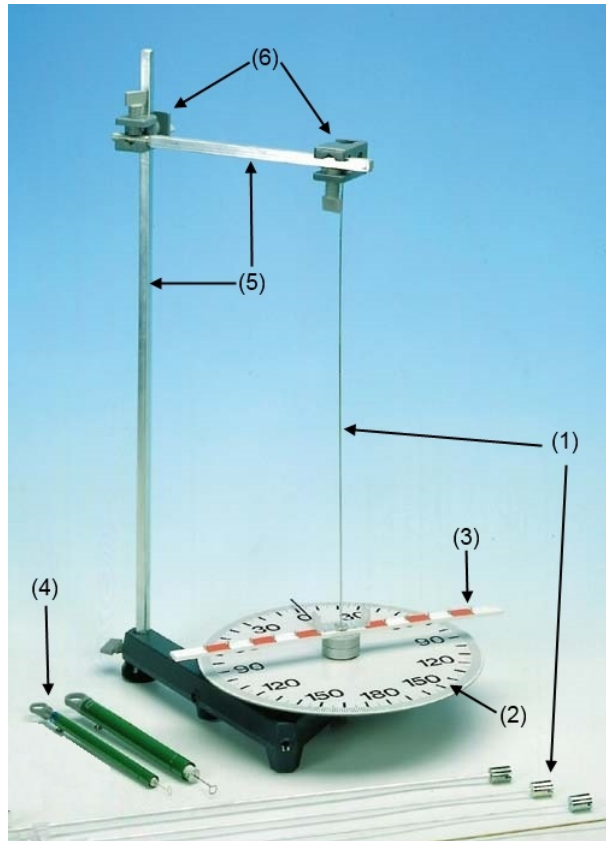
---

rezidualni moment sile pada na nulu, tj trenutni moment sile se menja sa vremenom približno po zakonu

$$M(t) \approx M_{eq} + M_{res}^{(0)} e^{-t/T_r}, \quad (6.8)$$

gde je  $M_{res}^{(0)}$  početna vrednost rezidualnog momenta sile.

## 6.2 Opis aparature

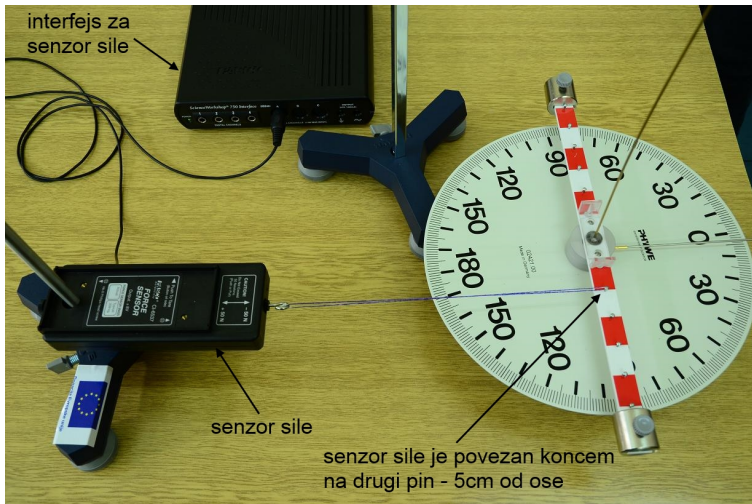


Slika 6.4 Aparatura za određivanje modula torzije.

Aparatura za određivanje modula torzije (slika 6.4) se sastoji iz:

- (1) - nekoliko uzoraka od različitih materijala;
- (2) - uglomera (najmanji podeok  $1^\circ$ );
- (3) - poluge sa podeocima na 5; 7,5; 10; 12,5 i 15 cm;
- (4) - dva dinamometra opsega 1 N i 3 N;
- (5) - vertikalnog i horizontalnog nosača;
- (6) - stega.

Uz ovo, za ispitivanje relaksacije ćemo koristiti i senzor sile povezan na akvizicioni modul (interfejs) i dalje na kompjuter - vidi sliku 6.5.



Slika 6.5 Postavka za snimanje .

## 6.3 Eksperimentalna procedura

Pre bilo kakvih drugih merenja izmeriti dimenzije žice:

- Izmeriti metrom dužinu žice  $L$ . Meriti dužinu između početaka proširenja žice. Uzeti da je  $\Delta L = 1$  mm.
- Izmeriti digitalnim mikrometrom debljinu žice na pet različitih mesta. Izmerene podatke uneti u tabelu.

$d_1$ [mm]	$d_2$ [mm]	$d_3$ [mm]	$d_4$ [mm]	$d_5$ [mm]	$d$ [mm]	$\Delta d$ [mm]

Za debljinu žice uzeti aritmetičku sredinu

$$d = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_5}{5},$$

sračunati devijacije  $\delta d_i = d_i - d$  od aritmetičke sredine  $d$ , naći maksimalnu apsolutnu devijaciju  $|\delta d|_{max}$ , pa za grešku  $\Delta d$  uzeti

$$\Delta d = \max\{|\delta d|_{max}, \varepsilon_{mik}\},$$

gde je  $\varepsilon_{mik} (= 0,004 \text{ mm})$  greška izgradnje digitalnog mikrometra.

### Zadatak 1 - određivanje modula torzije

Cilj ovog dela eksperimenta je da se izmeri modul torzije uzorka koji je odabrao nastavnik; uzorak je postavljen na aparaturu.

Merenje uvrtanja žice u funkciji momenta sile primenjenog na žicu i određivanje modula torzije sprovesti kroz sledeće korake:

1. Ostvariti moment sile koji uvrće žicu dinamometrom sa opsegom od 1 N. Dinamometar zakačiti najbliže žici na rastojanju 5 cm od centra žice. Započeti sa **postepenim** natezanjem dinamometra dok se žica ne uvrne za ugao uvrtanja  $\alpha \approx 20^\circ$ . Voditi računa da sila bude normalna na krak sile, tj da ugao između dinamometra i poluge na koju je dinamometar zakačen bude  $90^\circ$ .
2. Očitati silu  $F$  na skali dinamometra i ugao uvrtranja  $\alpha$  na skali uglomera. Očitane podatke uneti u tabelu 6.1.<sup>2</sup> Proceniti grešku ugla uvrtranja  $\Delta\alpha$  i grešku sile dinamometra  $\Delta F$  na osnovu fluktuacija ovih veličina.<sup>3</sup> Smatrati da je relativna greška za moment sile data sa

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta F}{F},$$

gde je  $\Delta R = 1 \text{ mm}$  greška za krak sile.

**Table 6.1** Ugao uvrtranja žice  $\alpha$  u funkciji momenta sile  $M$ .

Nº	$R$ [m]	$F$ [N]	$M$ [Nm]	$\Delta M$ [Nm]	$\alpha$ [°]	$\Delta\alpha$ [°]
1						

<sup>2</sup> Ova tabela mora imati barem 10 vrsta da bi u nju mogli da unesemo rezultate tolikog broja merenja.

<sup>3</sup> Dinamometar pridržavamo rukom pa već i zbog toga sila i ugao fluktuiraju. Procenjena greška  $\Delta\alpha$  ne sme biti manja od  $1^\circ$  a  $\Delta F$  ne sme biti manje od najmanjeg podeoka na skali dinamometra.

3. Povećavati silu većim istežanjem dinamometra tako da se ugao uvrtnja povećava za oko  $10^\circ$ . Nakon svakog povećanja sile prvo sačekati oko 15 s, pa onda očitati silu i ugao uvrtnja. Očitane vredosti uneti u tabelu 6.1.
4. Nakon što stignemo do kraja opsega dinamometra, držeći žicu rukom otkaçiti dinamometar i zakačiti ga na sledeći pin koji je na većem rastojanju od centra žice. Zatim postepeno natezati dinamometar dok se žica ne uvrne za narednih  $10^\circ$  stepeni. Nastaviti sa merenjem ... sve dok se ne ostvari uvrtnje od oko  $90^\circ$ .
5. Nacrtati grafik ugla uvrtnja žice  $\alpha$  u funkciji primenjenog momenta sile  $M$ .
6. Grafičkom metodom odrediti pravu koja najbolje fituje izmerene podatke, naći njen nagib  $b$  i proceniti njegovu grešku  $\Delta b$ .
7. Sračunati modul torzije  $G$  po formuli

$$G = \frac{5760}{\pi^2} \cdot \frac{L}{bd^4},$$

i proceniti njegovu grešku uzimajući da je relativna greška data sa

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta L}{L} + 4\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta b}{b}.$$

8. U izveštaju dati vrednost  $b \pm \Delta b$  dobijenu običnim metodom najmanjih kvadrata.<sup>4</sup> Ucrtati na grafik najbolju pravu dobijenu ovim metodom (npr isprekidanom linijom ili drugom bojom). Izračunati  $G \pm \Delta G$  na osnovu tako nadjenog nagiba  $b$ .

<sup>4</sup> Za izračunavanja koristiti (i prikazati) tabelu za običan metod najmanjih kvadrata.

## Zadatak 2 - snimanje histereziisa žice pri njenom uvrtnanju

Da bi se opazio (i snimio) histereziis žice pri uvrtnanju potrebno je relativno brzo uvrtnati žicu. Redosled koraka bi bio sledeći:

1. Povezati dinamometar opsega 3 N na pin udaljen 15 cm od ose žice; tokom snimanja histereziisa koristiti samo ovaj dinamometar i ne menjati pin na koji je dinamometar povezan.
2. Snimanje histereziisa započeti sa neuvrnutom žicom.
3. Povećavati ugao uvrtnanja u koracima od po  $\sim 30^\circ$ .
4. Kada ugao uvrtnanja dostigne vrednost od  $\sim 240^\circ$ , započeti smanjenje ugla uvrtnanja smanjujući natezanje dinamometra.
5. Nakon što ugao uvrtnanja padne na  $\sim 0^\circ$ , započeti sa uvrtnanjem žice u **suprotnom smeru**.
6. Povećavati ugao uvrtnanja dok ne bude približno jednak maksimalnom uglu uvrtnanja u prvobitnom smeru.
7. Nakon toga smanjivati ugao uvrtnanja, proći kroz nulu, pa nastaviti sa uvrtnanjem u prvobitnom smeru.
8. Prekinuti merenje kada ugao uvrtnanja (približno) dostigne prvobitnu maksimalnu vrednost.
9. Rezultate merenja uneti u tabelu 6.2.

**Table 6.2** Mehanički histereziis usled uvrtnanja žice.

Nº	$R$ [m]	$F$ [N]	$M$ [Nm]	$\alpha$ [°]
1				

(Tabela treba da ima barem 40 vrsta.)

10. Nacrtati histereziisnu krivu; na apscisnu osu naneti ugao uvrtnanja  $\alpha$ .

## Zadatak 3 - snimanje relaksacije žice

Relaksacija napona u uvrnutoj žici se snima pri konstantnom uglu uvrtnanja. Ugao uvrtnanja mora biti dovoljno veliki da bi se javile plastične deformacije u spoljašnjim slojevima žice. Snimanje sprovesti po sledećim koracima:

1. Povezati senzor sile sa akvizicionim modulom i kompjuterom na osnovu slike



2. Uvrnuti žicu za veliki ugao  $\alpha_0$ . U kojim granicama treba da bude taj ugao da bi bio dovoljno veliki zavisi od dužine, prečnika i materijala žice. Kako je cilj ove etape eksperimenta demonstracija a ne detaljno kvantitativno ispitivanje relaksacije, približnu vrednost početnog ugla  $\alpha_0$  uzeti od nastavnika. Za npr mesinganu žicu ovaj ugao bi trebalo da bude oko  $360^\circ$ .
3. Povezati neistegljivim koncem polugu aparature sa senzorom sile učvršćenim na postolju. Povezivanje izvršiti na pinu udaljenom 5 cm od ose žice. Konac treba da napinje senzor sile i da bude normalan na polugu.
4. Uz pomoć nastavnika snimiti senzorom sile kako se sila  $F$  menja tokom vremena  $t$ .
5. Odštampati ovaj grafik.
6. Uz pomoć nastavnika naitovati zavisnost  $F(t)$  na modelnu funkciju

$$F(t) = A + Be^{-t/T_r} ,$$

i odrediti karakteristično vreme relaksacije  $T_r$ .

Napomena: Relaksacija sile je proporcionalna relaksaciji momenta sile opisanoj zavisnošću (6.8).

# 7 Odredjivanje ubrzanja Zemljine teže fizičkim klatnom

---

## 7.1 Fizičko klatno

**Fizičko klatno** je kruto telo koje pod dejstvom sile Zemljine teže osciluje oko nepomične horizontalne ose. Ova osa, koju ćemo zvati **osa klatna**, ne prolazi kroz centar mase tela te se u (stabilnom) ravnotežnom položaju centar mase nalazi **vertikalno ispod** nje.

Fizičko klatno ima samo jedan stepen slobode - ugao otklona  $\theta$  u odnosu na ravnotežni položaj, vidi sliku 7.1. Radi odredjenosti, osu klatna ćemo usmeriti ka nama i uzeti za  $z$ -osu, dok ćemo  $x$ -osu uzeti duž vertikale kroz ravnotežni položaj centra mase i usmeriti je naniže. Ugao otklona, tj rotacije,  $\theta$  ćemo meriti u pozitivnom smeru u odnosu na  $x$ -osu. Jedino kretanje koje vrši klatno je rotacija oko ose klatna i ona se vrši u skladu sa jednačinom

$$J\ddot{\theta} = M, \quad (7.1)$$

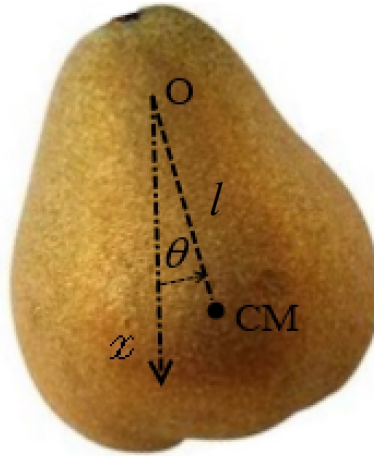
gde su  $J$  i  $M$  moment inercije i rezultujući moment sile u odnosu na osu klatna.

Dominantan uticaj na kretanje fizičkog klatna ima sila Zemljine teže. Doprinos preostalih sila je mali i biće tretiran kao popravka koja se uzima u obzir jedino pri veoma preciznim merenjima. Moment gravitacione sile iznosi

$$M_g = -mgl \sin \theta, \quad (7.2)$$

gde je  $m$  masa klatna,  $l$  rastojanje ose klatna od njegovog centra mase i gde znak "-" ukazuje da moment  $M_g$  nastoji da vrati klatno u stabilni ravnotežni položaj. Ukoliko bi se klatno kretalo u vakuumu i ako bi trenje i deformacije u ležištima bili zanemarljivi, moment  $M_g$  bi bio jedini moment koji deluje na klatno, te bi jednačina kretanja klatna glasila

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{J} \sin \theta = 0. \quad (7.3)$$



**Slika 7.1** Fizičko klatno - shematski prikaz. Klatno osciluje oko nepomične horizontalne ose  $O$  na rastojanju  $l$  od centra mase (CM) klatna. Ugao otklona  $\theta$  merimo u odnosu na  $x$ -osu. Ova osa prolazi kroz stabilni ravnotežni položaj klatna koji se nalazi vertikalno ispod ose klatna.

Uvodjenjem **redukovane dužine** fizičkog klatna

$$l_r \equiv \frac{J}{ml}, \quad (7.4)$$

prethodna jednačina se može napisati u obliku jednačine matematičkog klatna

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l_r} \sin \theta = 0, \quad (7.5)$$

koja se, kao što znamo, za male uglove  $\theta$  svodi na jednačinu linearnog harmonijskog oscilovanja

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (7.6)$$

sa sopstvenom ugaonom frekvencijom

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l_r}}, \quad (7.7)$$

i periodom

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}}. \quad (7.8)$$

## Zavisnost kretanja od položaja ose klatna

U ovom poglavlju ćemo smatrati da na fizičko klatno deluje **samo** moment gravitacionih sila  $M_g$ , kao i da su uglovi otklona  $\theta$  **mali**.

Period fizičkog klatna  $T$  zavisi od rastojanja  $l$  ose klatna od njegovog centra mase. Na osnovu Štajnerove teoreme moment inercije klatna iznosi

$$J = J_0 + ml^2. \quad (7.9)$$

gde je  $J_0$  moment inercije u odnosu na osu koja prolazi **kroz centar mase** i **paralelna** je osi klatna. Radi dalje analize uvodi se **žiro-radijus**

$$k \equiv \sqrt{\frac{J_0}{m}}, \quad (7.10)$$

zahvaljujući kojem se moment inercije  $J$  može napisati u obliku

$$J = m(k^2 + l^2), \quad (7.11)$$

a redukovana dužina  $l_r$  u obliku

$$l_r = \frac{k^2}{l} + l. \quad (7.12)$$

Pri fiksiranom žiro-radujusu  $k$ , prethodni izraz pokazuje kako redukovana dužina  $l_r = f(l)$  zavisi od  $l$ , gde je

$$f(l) = \frac{k^2}{l} + l \quad (7.13)$$

funkcija čiji je grafik dat na slici 7.2. Minimalni žiro radijus  $(l_r)_{min} = 2k$  se javlja za  $l = k$ , dok za sve vrednosti  $l_r$  veće od minimalne postoje dva **konjugovana rastojanja**

$$l_+ = \frac{l_r}{2} + \sqrt{\frac{l_r^2}{4} - k^2}, \quad l_- = \frac{l_r}{2} - \sqrt{\frac{l_r^2}{4} - k^2}, \quad (7.14)$$

odnosno dve **konjugovane ose**, za koja je redukovana dužina klatna **ista**

$$f(l_+) = f(l_-) = l_r.$$

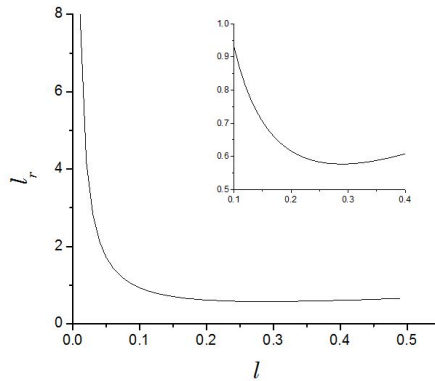
Konjugovana rastojanja  $l_+$  i  $l_-$  su rešenja kvadratne jednačine

$$l^2 - l_r l + k^2 = 0,$$

a od **posebne važnosti** je da u zbiru daju redukovanu dužinu:

$$l_r = l_+ + l_-, \quad (7.15)$$

što pretstavlja osnovu za merenje ubrzanja Zemljine teže fizičkim klatnom.



**Slika 7.2** Grafik funkcije  $f(l) = k^2/l + l$  koja opisuje zavisnost redukovane dužine klatna  $l_r = f(l)$  od rastojanja  $l$  ose klatna od centra mase. Podaci odgovaraju klatnu u obliku tankog homogenog štapa jedinične dužine  $L$ , čiji je centar mase na sredini štapa, a žiro-radijus  $k^2 = 1/12$ . Ako dužina nije jednična, obe koordinatne ose treba množiti sa  $L$ . Funkcija  $f(l)$  ima veoma **plitak** minimum  $f(l)_{\min} = 2k$  koji dostiže za  $l = k$ . Ponašanje  $f(l)$  u okolini minimuma je zumirano u umetnutoj slici.

### Merenje $g$ fizičkim klatnom

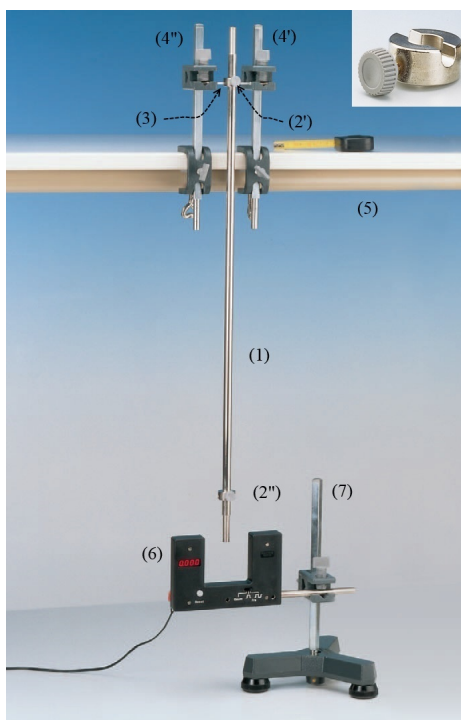
Merenje ubrzanja Zemljine teže  $g$  fizičkim klatnom se u principu svodi na merenje redukovane dužine klatna  $l_r$  i odgovarajućeg perioda  $T$ , te izračunavanje  $g$  po formuli

$$g = 4\pi^2 \frac{l_r}{T^2}, \quad (7.16)$$

iz izmerenih  $l_r$  i  $T$ . Merenje  $l_r$  zavisi donekle od osobina fizičkog klatna te stoga prvo dajemo kratak opis aparature koja će se koristiti u eksperimentu.

### Kratak opis aparature

Za merenje ubrzanja Zemljine teže  $g$  koristimo aparaturu sa fizičkim klatnom prikazanu na slici 7.3. Klatno čine čelična šipka (dužine  $L \approx 750$  mm i prečnika  $D \approx 12$  mm) i dva jednaka mala čelična prstena koji se postavljaju na šipku. Prstenovi se mogu pomerati duž šipke i fiksirati u željenom položaju pomoću zavrtnja. Preko prstenova se klatno oslanja na osu klatna. Osa klatna se postavlja u horizontalni položaj uz pomoć dva vertikalna nosača pričvršćena za masivno horizontalno postolje. Period oscilovanja klatna se meri digitalnim hronometrom, a rastojanje između prstenova metarskom trakom.



**Slika 7.3** Aparatura sa fizičkim klatnom za merenje ubrzanja Zemljine teže  $g$ . Najvažniji delovi aparature su: (1) - čelična šipka dužine  $L = 750$  mm i prečnika  $D = 12$  mm; (2') i (2'') - čelični prstenovi koji služe kao ležišta ose klatna; (3) - osa klatna u ležištu (2'); (4') i (4'') - nosači ose klatna; (5) - horizontalno postolje; (6) - digitalni merač vremena sa laserskim snopom; (7) - nosač merača vremena. Desni gornji ugao: uvećana slika prstena (2') i (2'').

### Odredjivanje redukovane dužine klatna

Šipka klatna je rotaciono simetrična u odnosu na svoju uzdužnu osu te joj se centar mase nalazi na sredini te ose. Obzirom da je šipka **tanka** (prečnik znatno manji od dužine), njen centralni moment inercije (u odnosu na normalu na uzdužnu osu) približno iznosi  $m_c L^2/12$ , gde je  $m_c$  masa šipke ( $m_c = \rho_{\text{Fe}} \pi D^2 L/4 \approx 660$  g;  $\rho_{\text{Fe}} \approx 7.8$  g/cm<sup>3</sup> je gustina čelika). Stoga bi bez dva mala prstena žiro-radijus klatna iznosio  $k \approx L^2/\sqrt{12} = 216.5$  mm. Posledica je da za osu klatna, postavljenu ne dalje od 10 cm u odnosu na kraj klatna, konjugovana osa (kojoj odgovara **isti** period, a locirana je sa druge strane centra mase na uzdužnoj osi klatna) leži **bliže** centru mase, na rastojanju  $l_-$  od njega - vidi

(7.14). Zaključak ostaje na snazi i za klatno sa prstenovima jer je njihova masa  $m_p \approx 35$  g znatno manja od mase šipke.

Govoreći o uticaju položaja ose klatna na njegovo kretanje nismo se bavili pitanjem kako da se ta osa realizuje. Sada možemo reći da prstenovi služe upravo toj svrsi. **Fiksiranjem** položaja jednog, uslovno rečeno - **prvog**, prstena na rastojanju između 5 cm i 10 cm od bližeg kraja klatna i **oslanjanjem** klatna na ovaj prsten mi fiksiramo prvu osu klatna. Pomeranje preostalog, tj **drugog**, prstena dovodi do **male preraspodele mase** u sistemu, zbog čega se **malo menjaju** položaj centra mase, moment inercije i žiro-radijus klatna. Posledica je da će doći i do **male promene** perioda  $T_1(l)$  oscilovanja klatna oko prve ose u funkciji rastojanja  $l$  drugog prstena u odnosu na prvi prsten, vidi sliku 7.4, iako je položaj prve ose klatna u odnosu na šipku **ostao nepromenjen**. Da promena mora biti mala možemo zaključiti i ovako: u graničnom slučaju kada masa prstena  $m_p \rightarrow 0$ , promenom položajem drugog prstena se parametri od kojih zavisi  $T_1$  ne menjaju, što znači da za male vrednosti  $m_p > 0$  mora biti  $T_1 \approx const$ .

Sa druge strane ako posmatramo oscilacije klatna oko ose kroz drugi prsten, period oscilovanja  $T_2$  se znatnije menja sa promenom  $l$ , vidi sliku 7.4, zato što se tada **menja** položaj ose klatna u odnosu na **masivnu** šipku. Šta više, u graničnom slučaju kada  $m_p \rightarrow 0$  zavisnost  $T_2(l)$  je data izrazom

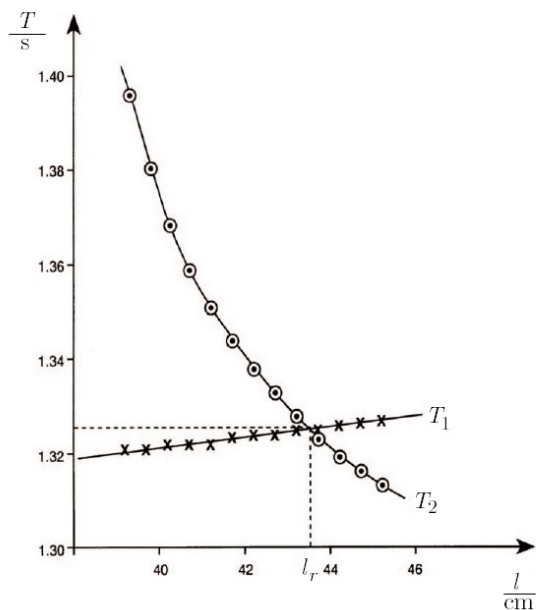
$$\lim_{m_p \rightarrow 0} T_2(l) = 2\pi \sqrt{\frac{k_c^2}{l - l_c} + l_c l}, \quad (7.17)$$

koji dobro aproksimira pravu zavisnost  $T_2(l)$  pri malim vrednostima  $m_p > 0$ . Izraz (7.17) sledi iz (7.12) i u njemu su rastojanje centra mase šipke od prve ose  $l_c$ , kao i žiro-radijus šipke  $k_c$ , konstantne veličine pri fiksiranom položaju prvog prstena.

Presek grafika perioda  $T_1(l)$  i  $T_2(l)$ , slika 7.4, određuje:

- redukovanu dužinu  $l_r$  klatna, jednaku apscisi  $l$  tačke preseka;
- period klatna  $T$  jednak ordinati tačke preseka.

Zaista, smatrajući da smo položaj prstenova i jedne ose **fiksirali**, a da položaj druge ose variramo **bez promene** položaja prstenova (što je teorijski zamislivo, ali sa postojećom aparaturom u praksi neizvodivo), vidimo je osa kroz drugi prsten upravo tražena osa konjugovana prvoj.



**Slika 7.4** Period  $T_1$  klatna i odnosu na prvi prsten i period  $T_2$  klatna i odnosu na drugi prsten u funkciji rastojanja  $l$  između prstenova. Apscisa preseka ova dva grafika je jednaka redukovanoj dužini klatna  $l_r$ .

## 7.2 Doprinos ostalih sila\*

Na klatno u vazduhu deluje sila potiska. Ona je usmerena vertikalno naviše, intenzitet joj je

$$F_p = \rho_a V g, \quad (7.18)$$

a napadna tačka u **geometrijskom centru** tela. Gustina vazduha  $\rho_a$  je data u tabeli 7.3 na kraju teksta;  $V$  je zapremina klatna. Moment sile potiska

$$M_p = \rho_a V g l_v \sin \theta, \quad (7.19)$$

nastoji da izvede telo iz (stabilnog) ravnotežnog položaja i zavisi od rastojanja  $l_v$  ose klatna od geometrijskog centra. Za homogena tela konstantne gustine  $\rho$  (naš slučaj!) prethodna formula prelazi u

$$M_p = m \frac{\rho_a}{\rho} g l \sin \theta = -M_g, \quad (7.20)$$



jer se geometrijski centar poklapa sa centrom mase. Potisak vazduha smanjuje ukupni moment sila na klatno ne menjajući njegov moment inercije.

Krećući se kroz vazduh, klatno povlači za sobom sloj vazduha, što mu povećava moment inercije ne menjajući ukupni moment sila. Realan proračun je moguć samo numeričkim metodama, a dobijeni zaključak glasi: pri sporom kretanju klatna, masa vazduha  $m_d$  kojeg klatno povlači približno je jednaka masi istisnutog vazduha ( $m_d \approx \rho_a V = m \rho_a / \rho$ ), centar povlačenog vazduha se približno poklapa sa centrom mase klatna, te mu moment inercije približno iznosi

$$J_d \approx m \frac{\rho_a}{\rho} (k_d^2 + l^2), \quad (7.21)$$

gde je  $k_d$  žiro-radijus povlačenog vazduha, a  $l$  rastojanje ose od centra mase.

Tako je ukupni moment inercije klatna i povlačenog vazduha

$$J_u = J + J_d = m[(k^2 + \rho_a k_d^2 / \rho) + (1 + \rho_a / \rho) l^2]. \quad (7.22)$$

a jednačina malih oscilacija

$$J_u \ddot{\theta} = -m(1 - \rho_a / \rho) g l \theta. \quad (7.23)$$

Kvadrat ugaone frekvencije oscilacija je

$$\omega_u^2 = \frac{m(1 - \rho_a / \rho) g l}{J_u}, \quad (7.24)$$

a kvadrat perioda

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot \frac{1 + \rho_a / \rho}{1 - \rho_a / \rho} \left( \frac{k_u^2}{l} + l \right), \quad (7.25)$$

gde je

$$k_u^2 = \frac{k^2 + \rho_a k_d^2 / \rho}{1 + \rho_a / \rho}, \quad (7.26)$$

kvadrat efektivnog žiro-radijusa. Izraz (7.25) pokazuje da je period oscilovanja **isti** u odnosu na dve konjugovane ose udaljene

$$l_+ = \frac{l_r}{2} + \sqrt{\frac{l_r^2}{4} - k_u^2}, \quad l_- = \frac{l_r}{2} - \sqrt{\frac{l_r^2}{4} - k_u^2} \quad (7.27)$$

od ose oscilovanja klatna, i međusobnom rastojanju

$$l_r = l_+ + l_-.$$

Redukovana dužina klatna  $l_r$  je sa periodom vezana relacijom

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot \frac{1 + \rho_a / \rho}{1 - \rho_a / \rho} l_r, \quad (7.28)$$

odakle nalazimo **korigovani** izraz za ubrzanje Zemljine teže

$$g = 4\pi^2 \frac{1 + \rho_a/\rho}{1 - \rho_a/\rho} \cdot \frac{l_r}{T^2}. \quad (7.29)$$

Obzirom da je  $\rho_a/\rho \sim 10^{-4}$ , korekcija je potrebna kada želimo na izmerimo  $g$  sa relativnom greškom manjom od  $10^{-3}$ .

Navedeni primer ilustruje kako **nepotpuni** model realnog sistema uzrokuje sistematsku grešku indirektnog merenja zasnovanog na modelu, i kako se takva sistematska greška može **redukovati**.

Pored navedenih, na fizičko klatno deluju i druge sile koje do sada nismo razmotrili. Pre svih, tu je otpor vazduha koji nastoji da zaustavi klatno. Pri sporom kretanju klatna moment otpora vazduha je

$$M_o = -r\dot{\theta}, \quad (7.30)$$

gde je  $\dot{\theta}$  ugaona brzina klatna, a  $r$  koeficijent otpora koji zavisi od oblika i veličine klatna. Usled prisustva otpora vazduha klatno vrši **prigušene** oscilacije sa ugaonom frekvencijom

$$\omega = \sqrt{\omega_u^2 - \beta^2}, \quad (7.31)$$

gde je  $\beta = r/2J$ . Obzirom da je u "našim" eksperimentalnim uslovima  $\beta/\omega_u < 10^{-6}$ , a  $g$  u najpreciznijoj varijanti eksperimenta merimo sa tačnošću reda  $10^{-4}$ , korekciju na otpor vazduha **zanemarujemo**.

Listi stavki sa zanemarivim doprinosom dodajmo:

- Elastične deformacije nosača klatna - preko njih se oscilacije klatna prenose na nosač zbog čega se period produžava. **Važno upozorenje:** ako nosač nije dovoljno **krut i masivan** efekat **nije zanemariv**. Da bi se to izbeglo preporučuje se vezivanje aparature za pod laboratorije.
- Trenje u ležištu ose klatna - kada oslonci nisu oštri trenje je veće jer klatno lakše proklizava; usled proklizavanja klatno dobija i malu translatorsku komponentu kretanja.
- Uzdužne elastične deformacije klatna - klatno je najduže pri prolasku kroz ravnotežni, a najkraće u amplitudnom položaju; efekat je skoro uvek zanemariv.

## 7.3 Zadatak

### Postupak merenja

U pripreмноj fazi eksperimenta se aparatura postavlja u radni položaj i povezuju njene komponente. Pri tome je potrebno:

- Postaviti aparaturu na što masivnije postolje; ako je potrebno vezati postolje za pod laboratorije.
- Postaviti prizme na koje se oslanja klatno da budu **horizontalne** a njihovi nosači **vertikalni**.

Pripremnu fazu eksperimenta studenti **ne rade**, ali pre početka merenja moraju proveriti da je izvršena.

Merna faza eksperimenta dugo traje ako se sprovede u potpunosti. Zbog toga u nastavku sledi uputstvo za sprovođenje **skraćenog postupka** sa unapred datom relevantnom oblašću merenja koju bi inače trebalo prethodno odrediti.

U skraćenoj mernoj fazi eksperimenta je redom potrebno:

- M1.. Postaviti **prvi** prsten klatna na rastojanje 6 cm od bližeg kraja šipke i fiksirati ga zavrtanjem u tom položaju. Odrediti rastojanje  $L_1$  centra ovog prstena od bližeg kraja šipke kao aritmetičku sredinu nonijusom izmerenih rastojanja krajeva prstena od kraja šipke. Zabeležiti  $L_1$ . **Ne menjati položaj ovog prstena** u daljem toku eksperimenta.
- M2.. Postaviti **drugi** prsten na rastojanju od približno 458 mm od prvog prstena i izmeriti to rastojanje  $l_0$ . Rastojanje odrediti kao aritmetičku sredinu izmerenih rastojanja  $l_{0d}$  između daljih i rastojanja  $l_{0b}$  između bližih krajeva prstenova:

$$l_0 = (l_{0d} + l_{0b})/2,$$

Proceniti grešku po formuli:

$$\Delta l_0 = (\Delta l_{0d} + \Delta l_{0b})/2,$$

gde su  $\Delta l_{0d}$  i  $\Delta l_{0b}$  greške za  $l_{0d}$  i  $l_{0b}$ .

- M3.. Osloniti klatno na **prvi** prsten i meriti trajanje  $k = 50$  oscilacija  $t_k^{(1)}$ . Pošto izmerena vrednost za  $t_k^{(1)}$  **fluktuirá**, ponoviti njegovo merenje  $n (= 9)$  puta,<sup>1</sup> te tako dobiti uzorak  $\{t_{k,1}^{(1)}, t_{k,2}^{(1)}, \dots, t_{k,n}^{(1)}\}$  raspodele za  $t_k^{(1)}$ . Pomoću aritmetičke sredine uzorka

$$\overline{t_k^{(1)}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{k,i}^{(1)}$$

<sup>1</sup> Svaki student meri po tri puta, što daje  $n = 9$  merenja za grupu od tri studenta.

proceniti očekivanu vrednost  $\langle t_k^{(1)} \rangle$  raspodele za  $t_k^{(1)}$  uzimajući da je  $\langle t_k^{(1)} \rangle \approx \overline{t_k^{(1)}}$ . Preko standardne devijacije

$$s_{n-1}^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( t_{k,i}^{(1)} - \langle t_k^{(1)} \rangle \right)^2}$$

istog uzorka dati statističku procenu standardne devijacije  $\sigma_{t_k^{(1)}}$  raspodele trajanja  $k$  oscilacija klatna oslonjenog na prvom prstenu  $t_k^{(1)}$ , tj uzeti da je  $\sigma_{t_k^{(1)}} \approx s_{n-1}^{(1)}$ . Izračunati **standardnu grešku**  $SE_{\overline{t_k^{(1)}}}$  za aritmetičku sredinu  $\overline{t_k^{(1)}}$  po formuli

$$SE_{\overline{t_k^{(1)}}} = \frac{s_{n-1}^{(1)}}{\sqrt{n}}.$$

Za konačnu procenu greške  $\Delta \langle t_k^{(1)} \rangle$  za  $\langle t_k^{(1)} \rangle$  uzeti

$$\Delta \langle t_k^{(1)} \rangle = \max\{SE_{\overline{t_k^{(1)}}}, \Delta_t\},$$

gde je  $\Delta_t = 0,01$  s neizvesnost pojedinačnog merenja intervala vremena digitalnim hronometrom. Sračunati period i njegovu grešku:

$$T_1^0 = \frac{\langle t_k^{(1)} \rangle}{k}, \quad \Delta T_1^0 = \frac{\Delta \langle t_k^{(1)} \rangle}{k}.$$

- M4.. Okrenuti klatno "naopačke" (tj rotirati ga za  $180^\circ$  oko uzdužne ose) i započeti sa nizom merenja perioda klatna  $T_2$  oslonjenog u **drugom** prstenu počevši od samog kraja šipke.

M5.. Pri svakom izabranom položaju drugog prstena

- odrediti rastojanje  $l$  između prstenova mereći rastojanje  $l_d$  između daljih i rastojanje  $l_b$  između bližih krajeva prstenova. Uzeti da je  $l = (l_d + l_b)/2$  i da je njegova greška  $\Delta l = (\Delta l_d + \Delta l_b)/2$ .
- izmeriti  $n = 3$  puta trajanje  $t_k^{(2)}$  za  $k = 50$  oscilacija oko drugog prstena i sračunati period  $T_2$  ovih oscilacija<sup>2</sup>

$$T_2 = \left( t_{k,1}^{(2)} + t_{k,2}^{(2)} + t_{k,3}^{(2)} \right) / 150.$$

Izmerene podatke uneti u tabelu 7.1.

**Table 7.1** Period oscilovanja klatna oko drugog prstena.

No.	$l_d$ [mm]	$l_b$ [mm]	$t_k^{(2)}$ [s]	$l$ [mm]	$T_2$ [s]
1					

M6.. Ponavljati postupak merenja  $T_2$  smanjujući rastojanje između prstenova  $l$  u koracima  $\delta l = 4$  cm sve dok se ne nadju  $l'$  i  $l'' = l' - \delta l$  takvi da je

$$T_2'' \geq T_1^0 \geq T_2'.$$

Ovime je nadjen interval  $(l'', l')$  u kojem se grafici  $T_1(l)$  i  $T_2(l)$  **seku** - vidi sliku 7.4.

M7.. Nacrtati grafik izmerene zavisnosti  $T_2(l)$ , a umesto grafika  $T_1(l)$  horizontalnu liniju  $T_1 = T_1^0$  i odrediti njen presek sa grafikom  $T_2(l)$ .

Kako nam je cilj da nadjemo redukovanu dužinu klatna  $l_r$  koja je data apscisom presečne tačke grafika  $T_1(l)$  i  $T_2(l)$ , u nastavku eksperimenta bi trebalo da suzimo interval za  $l$  u kojem se nalazi  $l_r$ . Kako ova faza relativno dugo traje, ovde ćemo je izostaviti i preći na završnu fazu eksperimenta u kojoj se **precizno** mere oba perioda  $T_1(l)$  i  $T_2(l)$  u neposrednoj blizini presečne tačke koja se, pri datom položaju prvog prstena, nalazi u oblasti  $(458 \pm 4)$  mm rastojanja između prstenova.

Stoga postaviti drugi prsten na rastojanje 462 mm od prvog i izvršiti merenja pri tom rastojanju, zatim isto to ali na rastojanju od 460 mm, i dalje redom na rastojanjima od 458 mm, 456 mm i 454 mm.

<sup>2</sup> U opštem slučaju je  $T_2 = \left( \sum_{i=1}^n t_{k,i}^{(2)} \right) / nk$ . Svaki student meri jedanput trajanje  $k$  oscilacija, što daje  $n = 3$  merenja za grupe po tri studenta.

Pri tome:

- za svako izabrano  $l$  merimo **oba** perioda  $T_1$  i  $T_2$ ; merenja oba perioda vršimo  $n = 9$  puta da bi ih izmerili što pouzdanije. Procenu grešaka  $\Delta T_1$  za  $T_1$  i  $\Delta T_2$  za  $T_2$  vršimo po istom postupku kao i procenu greške  $\Delta T_1^{(0)}$  za  $T_1^{(0)}$  - vidi M3. Izmerene podatke unosimo u tabelu 7.2.

**Table 7.2** Period oscilovanja klatna oko prvog prstena  $T_1(l)$  i period oscilovanja klatna oko drugog prstena  $T_2(l)$  u neposrednoj okolini presečne tačke.

No.	$l_a$ [mm]	$l_b$ [mm]	$t_k^{(2)}$ [s]	$l$ [mm]	$T_1$ [s]	$\Delta T_1$ [s]	$T_2$ [s]	$\Delta T_2$ [s]
1								

- Crtamo zavisnosti  $T_2(l)$  i  $T_1(l)$  na istom grafiku u neposrednoj okolini presečne tačke. Pošto su  $T_2(l)$  i  $T_1(l)$  prikazani u uskom opsegu vrednosti rastojanja  $l$ , obe zavisnosti su praktično linearne. Stoga **grafičkom** metodom povlačimo pravu koja najbolje fituje zavisnost  $T_1(l)$  i procenjujemo marginu greške, pa zatim ponavljamo isti postupak, ali za zavisnost  $T_2(l)$ .

M8.. Redukovanu dužinu  $l_r$  nalazimo kao apscisu, a odgovarajući period  $T$  kao ordinatu preseka pravih za  $T_2(l)$  i  $T_1(l)$ . Greške  $\Delta l_r$  i  $\Delta T$  procenjujemo na osnovu margina grešaka ovih pravih.

**Table 7.3** Gustina vazduha  $\rho_a$  na atmosferskom pritisku.

temperatura [°C]	gustina $\rho_a$ [kg/m <sup>3</sup> ]
0	1.2922
5	1.2690
10	1.2466
15	1.2250
20	1.2041
25	1.1839
30	1.1644
35	1.1455

M8.. Ubrzanje Zemljine teže računamo po formuli

$$g = 4\pi^2 \frac{1 + \rho_a/\rho}{1 - \rho_a/\rho} \cdot \frac{l_r}{T^2}, \quad (7.32)$$

gde je  $\rho \approx 7800 \text{ kg/m}^3$  gustina neredjajućeg čelika,<sup>3</sup> a  $\rho_a$  gustina vazduha.

<sup>3</sup> U zavisnosti od sastava, gustina neredjajućeg čelika varira u granicama od  $7500 \text{ kg/m}^3$  do  $8000 \text{ kg/m}^3$ .

Gustinu vazduha nalazimo linearnom interpolacijom iz podataka za gustinu vazduha datim u tabeli 7.3 i temperature vazduha tokom eksperimenta.

M9.. Obzirom da je korekcionni faktor  $(1 + \rho_a/\rho)/(1 - \rho_a/\rho)$  u formuli za  $g$  vrlo blizak jedinici, maksimalnu relativnu grešku za  $g$  procenjujemo kao

$$\delta g \equiv \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l_r}{l_r} + 2\frac{\Delta T}{T},$$

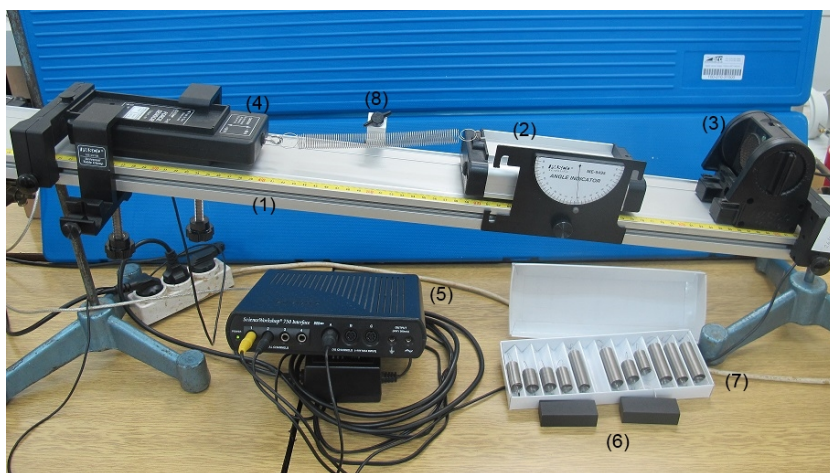
a maksimalnu apsolutnu grešku kao

$$\Delta g = g\delta g.$$

# 8 Oscilacije na strmoj ravni

## 8.1 Uvod

Staza sa kolicima, slika 8.1, je jedan od najfleksibilnijih sistema za izučavanje dinamike jednodimenzionalnog kretanja. Ona omogućava izvodjenje većeg broja eksperimenata kao što su: provera II Njutnovog zakona, izučavanje ubrzanog kretanja niz strmu ravan, održanje impulsa i energije, izučavanje elastičnih i neelastičnih sudara, itd.



**Slika 8.1** Staza sa kolicima (Classic Dynamics System 2.2m firme Pasco, USA). (1) - staza; (2) - kolica; (3) - senzor pozicije (kretanja); (4) - senzor sile; (5) - interfejs ScienceWorkshop 750; (6) - tegovi; (7) - opruge; (8) graničnik.

U eksperimentu o kojem ćemo govoriti se posmatraju oscilacije kolica po nagutoj traci za kretanje. Ako se kolica, povezana oprugom za gornji deo trake,



izvedu iz ravnotežnog položaja i puste ona počinju da vrše oscilatorno kretanje. Postavimo  $x$ -osu duž trake i usmerimo je ka njenom gornjem delu. Po II Njutnovom zakonu, jednačina kretanja kolica duž  $x$ -ose glasi:

$$ma = F_x^{(res)} \quad (8.1)$$

gde je  $m$  – masa kolica,  $a = \ddot{x}$  – ubrzanje kolica duž  $x$ -ose, dok je  $F_x^{(res)}$  projekcija rezultujuće sile na  $x$ -osu. Na kolica deluju:

1. sila zemljine teže  $mg$  vertikalno naniže,
2. elastična sila opruge  $F_{el} = k\Delta l$ , gde je  $k$  – konstanta elastičnosti opruge dok je  $\Delta l$ - istezanje opruge (razlika tekuće dužine opruge  $l$  i dužine opruge  $l_0$  u neistegnutom stanju); ova sila nastoji da smanji dužinu opruge i u posmatranom sistemu ima pravac i smer  $x$ -ose (jer ćemo se ograničiti na kretanje pri kojem je opruga stalno nategnuta).
3. sila trenja kotrljanja  $F_{tr}$  koja se opire kotrljanju točkova kolica. Dok se kolica kreću, vektor ove sile ima isti pravac a suprotan smer u odnosu na vektor brzine, dok je intenzitet sile jednak  $\mu Q$ , gde je  $\mu$ - **efektivni** koeficijent trenja kotrljanja, dok je težina kolica  $Q$  na strmoj ravni jednaka normalnoj komponenti sile zemljine teže  $mg \cos \alpha$ . Stoga možemo pisati  $F_{tr} = -\frac{v}{|v|} \mu mg \cos \alpha$ , gde je  $v = \dot{x}$  brzina kolica duž  $x$ -ose, a  $\frac{v}{|v|} = \pm 1$  njen znak. Kada kolica miruju, vučna sila<sup>1</sup> je uravnotežena statičkom silom trenja kotrljanja.
4. zanemarujemo ostale sile koje deluju na kolica (npr silu potiska, silu otpora vazduha tokom kretanja kolica, ... ) .

Da je trenje kotrljanja zanemarljivo kolica bi vršila linearne harmonijske oscilacije. Zaista, nakon uvrštavanja uslova mirovanja ( $a=0$ ) i izraza za rezultujuću silu, jednačina (8.1) postaje

$$0 = -mg \sin \alpha + k\Delta l \quad (8.2)$$

odakle nalazimo ravnotežno izduženje opruge

$$\Delta l_r = \frac{mg \sin \alpha}{k} . \quad (8.3)$$

U eksperimentu snimamo rastojanje kraja kolica od senzora pozicije i ova veličina određuje položaj kolica. Koristeći slobodu izbora, **koordinatni početak  $x$ -ose postavljamo u ravnotežni položaj kraja kolica**<sup>2</sup>. Nakon toga, izduženje

<sup>1</sup> Vučna sila je projekcija na pravac kretanja sume svih sila osim sile trenja.

<sup>2</sup> Koordinatni početak možemo izabrati kako nam odgovara i taj izbor ne utiče na jednačine kretanja.

opruge se može napisati kao  $\Delta l = \Delta l_r - x$ , gde veličina  $x$  predstavlja  $x$ -koordinatu kraja kolica u odnosu na izabrani koordinatni početak. Sledi:

$$F_x^{(res)} = -mg \sin \alpha + k\Delta l = (-mg \sin \alpha + k\Delta l_r) - kx = -kx$$

tako da jednačina (8.1) postaje

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (8.4)$$

što predstavlja jednačinu linearnih harmonijskih oscilacija sa kružnom frekvencijom

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (8.5)$$

i periodom

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{m/k}. \quad (8.6)$$

Amplituda i energija ovih oscilacija se ne smanjuju sa vremenom, a potencijalna energija se može napisati u obliku

$$E_p = \frac{kx^2}{2}. \quad (8.7)$$

**Kada se trenje kotrljanja ne može zanemariti**, a to je naš slučaj, jednačina kretanja kolica<sup>3</sup> pri kretanju u pozitivnom smeru  $x$ -ose glasi

$$m\ddot{x} = -kx - \mu Q \quad (8.8)$$

jer je tada znak brzine pozitivan, dok je pri kretanju u negativnom smeru

$$m\ddot{x} = -kx + \mu Q. \quad (8.9)$$

Jednačina (8.8) opisuje linearne harmonijske oscilacije. Zaista, nakon transformacije

$$m\ddot{x} = -kx - \mu Q = -k(x + \mu Q/k)$$

<sup>3</sup> Uslov mirovanja kolica glasi  $0 = -mg \sin \alpha + k\Delta \tilde{l}_r + F_{tr}$ , gde je  $\Delta \tilde{l}_r$  ravnotežno istežanje opruge. Odatle, umesto jednačine, nalazimo nejednačinu  $mg \sin \alpha - \mu Q \leq k\Delta \tilde{l}_r \leq mg \sin \alpha + \mu Q$  koju zadovoljava  $\Delta \tilde{l}_r$ . Posledica je da  $\Delta \tilde{l}_r$  može uzeti bilo koju od dozvoljenih vrednosti. Konkretna vrednost koju će uzeti  $\Delta \tilde{l}_r$  zavisi od predistorije sistema. U prvom trenutku kada brzina padne na nulu a istežanje opruge zadovolji gornju jednakost sila trenja kotrljanja će uravnotežiti vučnu silu, ubrzanje će pasti na nulu, te kretanje prestaje – tj trenutni položaj postaje položaj indiferentne ravnoteže.

ona se, prelaskom na nove koordinate

$$x^{(+)} \equiv x + \mu Q/k, \quad (8.10)$$

svodi na jednačinu linearnih harmonijskih oscilacija

$$m\ddot{x}^{(+)} = -kx^{(+)} \quad (8.11)$$

oko privremenog ravnotežnog položaja<sup>4</sup>

$$x_r^{(+)} = -\frac{\mu Q}{k}. \quad (8.12)$$

Potpuno analogno jednačina (8.9), koja opisuje kretanje u negativnom smeru x-ose, se prelaskom na nove koordinate

$$x^{(-)} \equiv x - \mu Q/k, \quad (8.13)$$

svodi na jednačinu linearnih harmonijskih oscilacija

$$m\ddot{x}^{(-)} = -kx^{(-)} \quad (8.14)$$

oko drugog privremenog ravnotežnog položaja

$$x_r^{(-)} = +\frac{\mu Q}{k}. \quad (8.15)$$

Kružna frekvencija i period oba tipa oscilacija su jednaki kružnoj frekvenciji (8.4) i periodu (8.5), respektivno.

Detaljniji uvid dobijamo ako pratimo kretanje kolica nakon što ih izvedemo iz ravnotežnog položaja **niz** strmu ravan i pustimo bez početne brzine. Tada će kolica početi da se kreću naviše, dakle u pozitivnom smeru x-ose. U  $x^{(+)}$ -koordinatama kretanje je dato sa

$$x^{(+)}(t) = -A_1 \cos \omega t$$

dok u "starim"  $x$ -koordinatama isto kretanje glasi

$$x(t) = -A_1 \cos \omega t - \mu Q/k. \quad (8.16)$$

Na navedeni način kolica se kreću u prvom poluperiodu  $T_{1/2}=T/2$ , tokom kojeg je njihova brzina sve vreme pozitivna. U momentu  $t = T_{1/2}$ , kada je njihov položaj dat sa  $x(T_{1/2}) = A_1 - \mu Q/k$ , kolica se trenutno zaustavljaju pa odmah

<sup>4</sup> Ovo je ravnotežni položaj u ne-transformisanim  $x$ -koordinatima; u novim koordinatima je ravnotežni položaj naravno na nuli jer je koordinatni početak novih koordinata smešten u ravnotežni položaj.

nastavljaju da se kreću, ali sada u **negativnom** smeru x-ose ( $v < 0$ ). Kretanje kolica u drugom poluperiodu se vrši u skladu sa jednačinom (8.13); stoga je

$$x^{(-)}(t) = -A_2 \cos \omega t,$$

odnosno

$$x(t) = -A_2 \cos \omega t + \mu Q/k, \quad (8.17)$$

uz bitnu napomenu da se amplituda promenila. Novu amplitudu  $A_2$  možemo naći iz uslova da u trenutku  $t=T_{1/2}$ , kada je  $\cos \omega T_{1/2} = -1$ , obe formule (8.15) i (8.16) daju isti rezultat:

$$A_1 - \mu Q/k = A_2 + \mu Q/k,$$

odakle je

$$A_2 = A_1 - 2\mu Q/k. \quad (8.18)$$

Nakon drugog poluperioda, kretanje se ponavlja na sličan način. Nakon što se trenutno zaustave, kolica odmah nastavljaju da se kreću u pozitivnom smeru. Ova etapa kretanja je u skladu sa jednačinom (8.10) pri čemu amplituda ima novu vrednost  $A_3 = A_2 - 2\mu Q/k$ . Zatim nastupa sledeći period u kojem se kolica kreću u negativnom smeru u skladu sa jednačinom (8.12) i sa amplitudom  $A_4 = A_3 - 2\mu Q/k$ , itd. Možemo zaključiti da:

1. smanjenje amplitude između  $n$ -tog i  $(n+1)$ -vog poluperioda iznosi

$$A_{n+1} = A_n - 2\mu Q/k, \quad (8.19)$$

2. konačna jednačina kretanja u  $n$ -tom poluperiodu glasi:

$$x(t) = -A_n \cos \omega t + (-1)^n \mu Q/k, \quad (8.20)$$

što predstavlja oscilacije oko privremenih ravnotežnih položaja  $\pm \mu Q/k$ ,

1. brzina kretanja u  $n$ -tom poluperiodu glasi:

$$v(t) = \omega A_n \sin \omega t. \quad (8.21)$$

2. Kretanje kolica prestaje kada se ispune uslovi navedeni u fusnoti 4.

Iz prethodnih izraza možemo naći kako se mehanička energija  $E = E_k + E_p$  menja u toku vremena. Potencijalnu energiju je i dalje pogodno računati u odnosu

na koordinatni početak; označavajući sa  $t'$  vreme mereno od početka tekućeg poluperioda, možemo se uveriti da je

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} \left[ A_n^2 \cos^2 \omega t' + \frac{2\mu Q A_n}{k} \cos \omega t' + \left( \frac{\mu Q}{k} \right)^2 \right], \quad (8.22)$$

dok je  $E_k = \frac{m\omega^2}{2} A_n^2 \sin^2 \omega t'$ . Stoga mehanička energija zavisi od vremena kao

$$E = \frac{k}{2} A_n^2 + \mu Q A_n \cos \omega t' + \frac{(\mu Q)^2}{2k}, \quad (8.23)$$

gde smo iskoristili  $m\omega^2 = k$ . Unutar svakog poluperioda je  $0 \leq t' \leq T_{1/2}$ , te  $\cos \omega t'$  opada. Smanjenje amplitude izmedju dva susedna poluperioda potiče od trenja pri kotrljanju.

## 8.2 Zadatak

U cilju proučavanja oscilovanja kolica na strmoj ravni izvršićemo sledeća merenja:

1. Izmerimo masu kolica (bez opruge) i masu opruge na digitalnoj vagi.
2. Kalibrišemo oprugu, tj. odredimo njen koeficijent elastičnosti  $k$ . U tom cilju snimamo silu istežanja opruge pri različitim položajima praznih kolica fiksiranih graničnikom.<sup>5</sup> Položaj kolica merimo senzorom pozicije, a silu istežanja senzorom sile. Merenja izvršiti za najmanje sedam položaja; rastojanje izmedju položaja u kojem su kolica najbliža i najdalja od senzora sile da ne prelazi 15 cm. Za svaki položaj nacrtati grafik pozicije kolica u funkciji vremena i naći srednju vrednost položaja; uraditi isto to sa silom. Tako ćete izmeriti silu pri datom položaju kolica. Otvoriti novu tabelu i u nju uneti podatke za silu u funkciji pozicije. Nacrtati grafik sile u funkciji pozicije kolica. Eksperimentalne tačke bi trebalo da leže na pravoj liniji čiji je koeficijent pravca jednak koeficijentu elastičnosti opruge  $k$ .
3. Pošto je opruga kalibrisana dodati na njih teg tako da se opruga istegne za dodatnih 5-10 cm.
4. Povuci rukom kolica naniže i pustiti ih da osciluju. Snimiti oscilovanje kolica senzorom pozicije.

<sup>5</sup> U svakom od ovih položaja opruga mora biti nategnuta.

5. Fitovati snimljene podatke za poziciju u funkciji vremena **deo po deo**.<sup>6</sup> Odrediti kako se menja amplituda oscilovanja u funkciji rednog broja poluperioda i kakvi su privremeni položaji ravnoteže. Uveriti se da se od tekućeg do narednog poluperioda amplituda linearno smanje u skladu sa (8.19) te odrediti efektivni koeficijent trenja kotrljanja  $\mu$ . Proveriti da li je razlika privremenih položaja ravnoteže jednaka  $2\mu Q/k$ . Odrediti ravnotežni položaj u kojem bi bila kolica kada ne bi bilo trenja kotrljanja.
6. Kalkulator funkcijom programskog paketa naći kako se tokom vremena menjaju kinetička i potencijalna energija kolica, kao i njihov zbir tj mehanička energija kolica. Izračunati rad trenja kotrljanja u funkciji vremena i proveriti da li je njegov zbir sa mehaničkom energijom kolica približno konstantan.
7. Sačuvati sve relevantne grafike i tabele u odgovarajuće fajlove. Slike i tabele možete sačuvati u pdf formatu sa "File - Print" (izaberite Adobe PDF printer i čekirajte "Print to file"...), ili u bitmap formatu sa "Display - Export Picture".<sup>7</sup> Brojne vrednosti podataka možete sačuvati ASCII tekstualni fajl sa "Display - Export Data...".

<sup>6</sup> Za dodatna uputstva konsultovati nastavnika.

<sup>7</sup> Bitmap fajlovi su do 2MB, a pdf do 100kB.

# 9 Prigušene i prinudne oscilacije

---

## 9.1 Linearni harmonijski oscilator

Linearni harmonijski oscilator je sistem koji vrši jednodimenzionalno kretanje pri kojem se njegova koordinata  $x$  tokom vremena  $t$  menja u skladu sa jednačinom

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (9.1)$$

gde je  $\omega_0$  **ugaona frekvencija** oscilacija<sup>1</sup>. Rešenje ove jednačine glasi

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (9.2)$$

gde je  $x(t)$  **elongacija** u trenutku  $t$ ,  $A$  je **amplituda** oscilacija,  $\varphi(t) \equiv \omega t + \varphi_0$  je **trenutna faza** oscilovanja, a  $\varphi_0$  **početna faza** oscilovanja. Oscilovanje se vrši između dva amplitudna položaja  $x = \pm A$  u kojima elongacija  $x(t)$  ima maksimalnu apsolutnu vrednost. Amplituda oscilovanja  $A$  i početna faza  $\varphi_0$  su određene početnim uslovima kretanja.

Kako je  $\cos(\alpha)$  periodična funkcija ugla  $\alpha$  sa periodom  $2\pi$ , vidimo da je i oscilovanje periodično u vremenu sa **periodom**

$$T = 2\pi/\omega_0. \quad (9.3)$$

Recipročna vrednost perioda je **frekvencija**

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}, \quad (9.4)$$

koja predstavlja **broj oscilacija po jedinici vremena**. Jedinica za frekvenciju je  $[f] = \text{s}^{-1}$ , ili *herc* (Hz), a za ugaonu frekvenciju  $[\omega_0] = \text{rad/s}$ .

Tipičan primer linearnog harmonijskog oscilatora je kuglica okačena o laku elastičnu oprugu koja osciluje u vakuumu duž pravca sile Zemljine teže, vidi sliku 9.1. Na nju deluju samo dve sile: sila Zemljine teže  $\vec{F}_g = m\vec{g}$  ( $m$  i  $\vec{g}$  su

<sup>1</sup> Sa  $\dot{x} = dx/dt$  označavamo prvi, a sa  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$  drugi izvod po vremenu koordinate  $x$ .

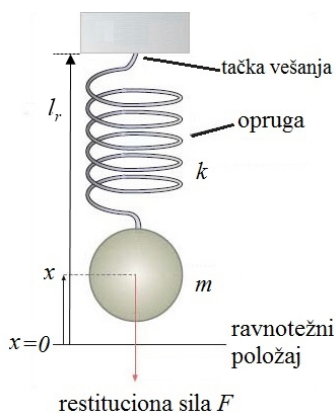
masa kuglice i ubrzanje Zemljine teže) i elastična sila opruge  $\vec{F}_e$  (nastoji da vrati oprugu u nedeformisano stanje) te je po II Njutnovom zakonu

$$m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_e, \quad (9.5)$$

gde je  $\vec{a}$  ubrzanje kuglice. Stoga kuglica dovedena **bez početne brzine** u položaj u kojem je

$$0 = \vec{F}_g + \vec{F}_e, \quad (9.6)$$

ostaje u njemu, te je takav položaj **ravnotežan**. Obzirom da pravac  $\vec{F}_e$  prolazi kroz tačku vešanja, ravnotežni položaj se nalazi vertikalno ispod te tačke.



**Slika 9.1** Shematski prikaz linearnog harmonijskog oscilatora.

Postavimo  $x$ -osu vertikalno kroz tačku vešanja, orijentisimo je naviše, a koordinatni početak postavimo u ravnotežni položaj, slika 9.1;  $x$ -koordinatu tačke vešanja označimo sa  $l_r$ . Kada se kuglica nalazi na  $x$ -osi obe sile,  $\vec{F}_g$  i  $\vec{F}_e$ , imaju samo  $x$ -komponentu te ne menjaju horizontalnu komponentu brzine. Stoga, ako je horizontalna komponenta brzine  $\vec{v}_H = 0$  u nekom trenutku vremena, tada je  $\vec{v}_H = 0$  sve vreme kretanja, tj kuglica se kreće **samo** duž  $x$ -ose. Ovo se najjednostavnije postiže tako što kuglicu izvedemo vertikalno naniže iz ravnotežnog položaja i pustimo je bez početne brzine.

Obzirom da  $x$ -komponenta elastične sile opruge iznosi  $F_e = -k\Delta l$ , gde je  $k$  konstanta elastičnosti opruge, a  $\Delta l = l - l_0$  izduženje opruge pri tekućoj dužini  $l$  i dužini nedeformisane opruge  $l_0$ , nalazimo da je  $F_e = -k[x + (l_r - l_0)]$ . Stoga



jednačina kretanja kuglice duž  $x$ -ose glasi

$$m\ddot{x} = -mg - k[x + (l_r - l_0)],$$

odakle se vidi da je u ravnotežnom položaju  $x = 0$  ispunjeno  $0 = -mg - k(l_r - l_0)$ , te jednačina kretanja postaje

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (9.7)$$

a to je jednačina linearnog harmonijskog oscilatora sa  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

Pored toga vidimo da:

- dužina opruge u ravnotežnom položaju kuglice iznosi  $l_r = l_0 + mg/k$ ,
- rezultujuća sila na kuglicu iznosi  $F_r = -kx$ ; ona uvek nastoji da vrati kuglicu u ravnotežni položaj te kažemo da je **restituciona**.
- kada kuglicu izvedemo vertikalno naniže iz ravnotežnog položaja i u trenutku  $t = 0$  pustimo da osciluje bez početne brzine, amplituda je jednaka udaljenju od ravnotežnog položaja, početna faza iznosi  $\varphi_0 = -\pi$ , te se kretanje vrši po zakonu  $x(t) = -A \cos(\omega_0 t)$ .

**Napomena:** pri oscilacijama duž vertikalnog pravca dolazi i do pobude rotacije kuglice oko vertikalne ose. Ovo se dešava zato što se pri kretanju naniže opruga malčice odvijaja te uvrće kuglicu, dok se pri kretanju naviše dešava suprotno. Efekat je obično mali, pa ga izostavljamo iz opisa da bi dobili što jednostavniji adekvatan model realnog sistema.

### *Brzina i energija harmonijskih oscilacija*

Brzina tela koje osciluje  $v = \dot{x} = dx/dt$  se **periodično** menja po zakonu

$$v(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (9.8)$$

i po apsolutnoj vrednosti dobija najveću vrednost, tj amplitudu,  $|v|_{max} = \omega_0 A$  pri prolasku kroz ravnotežni položaj  $x = 0$ .

Kinetička energija  $E_k = mv^2/2$  se tokom vremena takodje menja periodično

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2 [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)], \quad (9.9)$$

ali sa **duplo većom frekvencijom**. Potencijalna energija  $E_p = kx^2/2$  osciluje sa **istom** frekvencijom

$$E_p(t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2 [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)], \quad (9.10)$$

a energija kretanja  $E = E_k + E_p$  ostaje tokom vremena **konstantna** i iznosi

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2. \quad (9.11)$$

## 9.2 Prigušene oscilacije

Jednom pobudjene, harmonijske oscilacije se periodično ponavljaju u vremenu i traju večno. Nasuprot tome, realni oscilatori ne osciluju beskonačno dugo sa konstantnom amplitudom, odnosno energijom, već se tokom kretanja njihova amplituda i energija smanjuju dok se konačno ne smire u ravnotežnom položaju. Razlog tome su **disipativne** sile koje dovode do smanjenja mehaničke energije, a koje su u razmatranju harmonijskih oscilacija bile zanemarene.

Od svih takvih sila na oscilacije kuglice u vazduhu<sup>2</sup> najveći uticaj ima sila otpora vazduha. Ona se opire kretanju kuglice kroz vazduh i pri malim brzinama ima oblik  $F_v = -bv$ , gde je  $b$  koeficijent otpora vazduha koji zavisi od veličine kuglice. Ukoliko otpor vazduha pridodamo rezultujućoj sili (a preostale sile kao znatno manje zanemarimo) jednačina kretanja kuglice postaje

$$ma = -kx - bv, \quad (9.12)$$

odnosno

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (9.13)$$

gde je  $\beta \equiv b/2m$  **koeficijent prigušenja oscilatora**. Ova jednačina se naziva jednačina **prigušenih (linearnih harmonijskih) oscilacija**.

Rešenje jednačine prigušenih oscilacija (9.13) zavisi od odnosa  $\omega_0$  i  $\beta$ . Pri **slabom** prigušenju

$$\beta < \omega_0, \quad (9.14)$$

rešenje glasi

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (9.15)$$

<sup>2</sup> Oscilacije kuglice se tipično posmatraju ne u vakuumu, već u vazduhu. Sila potiska samo menja ravnotežni položaj kuglice i ne utiče na oscilovanje. Osim toga, kuglica pri kretanju povlači deo vazduha sa sobom, što samo povećava njenu "efektivnu" masu bez posledica po harmonijski karakter kretanja. Ono što narušava harmonijski karakter je trenje u tački vešanja i histerezis opruge. Oba efekta se javljaju i u vakuumu i dovode do gubitka energije.

gde je

$$\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (9.16)$$

ugaona frekvencija prigušenih oscilacija koja je manja od *sopstvene* frekvencije neprigušenih oscilacija  $\omega_0$ .

Za rešenje (9.15) kažemo da je *kvazi periodično* jer je proizvod jedne periodične funkcije  $\cos(\omega t + \varphi_0)$  i jedne aperiodične funkcije

$$A(t) \equiv Ae^{-\beta t}, \quad (9.17)$$

koja pokazuje kako se amplituda oscilacija menja sa vremenom. U skladu sa ovim izrazom, amplituda se tokom jednog perioda smanji

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T} \quad (9.18)$$

puta. Veličina  $e^{\beta T}$  se naziva *dekrement* prigušenja, a njen prirodni logaritam

$$\lambda = \beta T \quad (9.19)$$

*logaritamski dekrement* prigušenja; uz to se vreme  $\tau = 1/\beta$  potrebno da se amplituda smanji  $e$  puta naziva *vreme relaksacije*. Kada je prigušenje malo, tj  $\beta \ll \omega_0$ , tada mehanička energija oscilacija opada po zakonu

$$E(t) = E_0 e^{-2\beta t}, \quad (9.20)$$

gde je  $E_0$  energija u početnom trenutku vremena  $t = 0$ . Odavde se lako vidi da smanjenje energije tokom jednog perioda  $\Delta E \equiv E(t) - E(t+T)$  približno iznosi  $\Delta E \approx 2\beta T E(t)$ , te se tokom jednom perioda energija u relativnom iznosu smanji

$$\frac{E(t)}{\Delta E} = \frac{1}{2\lambda} \quad (9.21)$$

puta. Od značaja je i *faktor dobrote* (ili *faktor kvaliteta*) oscilatora<sup>3</sup>

$$Q \equiv 2\pi \frac{E}{P}, \quad (9.22)$$

gde je  $P \equiv \Delta E/T$  *snaga gubitaka* oscilatora; na osnovu prethodnog

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (9.23)$$

<sup>3</sup> Pokazuje se da ova veličina određuje širinu na polovini visine rezonantne krive oscilatora.

Kompletnosti radi, navedimo da je pri **jakom** prigušenju  $\beta > \omega_0$  kretanje *aperiodično*

$$x(t) = -\frac{v_0 + \omega_- x_0}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \exp(-\omega_+ t) + \frac{v_0 + \omega_+ x_0}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \exp(-\omega_- t). \quad (9.24)$$

Ovde su  $x_0$  i  $v_0$  početni položaj i početna brzina, a  $\omega_{\pm} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ . Pri *kritičnom prigušenju*  $\beta = \omega_0$  je pak

$$x(t) = [x_0(1 + \omega_0 t) + v_0 t] e^{-\omega_0 t}, \quad (9.25)$$

a za kretanje se kaže da je *kritično aperiodično*. Može se pokazati da se pri ovakvom kretanju sistem najbrže vraća u ravnotežno stanje.

## 9.3 Prinudne oscilacije

Prinudnim oscilacijama nazivamo kretanje linearnog harmonijskog oscilatora pod **prostoperiodičnim spoljašnjim uticajem**  $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$ , koji zovemo **prinudnom silom**. Kretanje je opisano jednačinom **prinudnih oscilacija**

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t), \quad (9.26)$$

u kojoj je:

- $x$  koordinata koja određuje položaj oscilatora,
- $\omega_0$  **sopstvena** ugaona frekvencija oscilatora,
- $\beta$  koeficijent prigušenja,
- $\omega$  ugaona frekvencija prinudne sile,
- $f_0$  amplituda prinudne sile, koja ima istu dimenziju kao i  $\ddot{x}$ .

Napomena: primetimo da se na levoj strani jednačine (9.26) nalaze nepoznate veličine, a na desnoj poznata funkcija vremena  $f_0 \cos(\omega t)$ . Za  $f_0 \neq 0$  desna strana jednačine je različita od nule te kažemo da je jednačina **nehomogena**. U suprotnom jednačina je **homogena** i opisuje **slobodne** oscilacije sistema, bez dejstva prinudne sile.

Kao tipični primer prinudnih oscilacija navedimo kuglicu mase  $m$  koja je vezana elastičnom oprugom konstante elastičnosti  $k$  i koja pod uticajem spoljašnje sile  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$  vrši jednodimenzionalno kretanje u otpornoj sredini sa silom otpora  $F_v = -bv$ , gde je  $b$  koeficijent otpora sredine. Za ovaj sistem je  $\omega_0^2 = \sqrt{k/m}$ ,  $2\beta = b/m$ , a prinudna sila  $f_0 = F_0/m$  ima dimenzije ubrzanja.

Opšte rešenje  $x_g(t)$  jednačine prinudnih oscilacija (9.26) je oblika<sup>4</sup>

$$x_g(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

gde je  $x_h(t)$  opšte rešenje **homogene** jednačine

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (9.27)$$

dok je  $x_p(t)$  **bilo koje** rešenje jednačine prinudnih oscilacija (9.26); takvo rešenje  $x_p(t)$  se naziva **partikularno**.

<sup>4</sup> Jednačina prinudnih oscilacija je diferencijalna jednačina jer sadrži izvode nepoznate funkcije  $x$  nezavisne promenljive  $t$ . Njeno rešenje je poznato tek kada znamo početne uslove: položaj i brzinu u početnom trenutku vremena. Opšte rešenje jednačine je rešenje koje sadrži dve neodredjene konstante koje treba odrediti tako da se zadovolje zadati početni uslovi.

U prethodnom poglavlju je pokazano pri  $\beta > 0$  slobodne oscilacije **zamiru** nakon **dovoljno dugog** vremena za bilo koji odnos  $\beta$  i  $\omega_0$ , tj. vrijedi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_h(t) = 0.$$

Zbog toga je, **dovoljno dugo** nakon početka, kretanje opisano partikularnim rešenjem:

$$x(t) \approx x_p(t),$$

tačnije njegovim "dugovremenskim" oblikom. Interval vremena po isteku kojeg smatramo da su slobodne oscilacije zamrle se zove **vreme uspostavljanja stacionarnog režima** ili kad nema opasnosti od zabune - vreme relaksacije. Relaksacija prinudnih oscilacija je obično relativno kratka, mada ima i suprotnih primera koje ovde nećemo razmatrati. Nakon nje sistem prelazi u **stacionarno stanje oscilovanja** čije se karakteristike tokom vremena **ne menjaju**.

Jednačina prinudnih oscilacija (9.26) ima partikularno rešenje oblika

$$x_p(t) = D \cos(\omega t) + A \sin(\omega t), \quad (9.28)$$

za<sup>5</sup>

$$D = f_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}, \quad A = f_0 \frac{2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}. \quad (9.29)$$

Konstanta  $D$  se naziva **amplituda disperzije**, dok se  $A$  naziva **amplituda apsorpcije**. Alternativno, partikularno rešenje se može napisati u obliku<sup>6</sup>

$$x_p(t) = x_0 \cos(\omega t - \phi), \quad (9.30)$$

gde je

$$x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} = \sqrt{D^2 + A^2} \quad (9.31)$$

**amplitudam**, a

$$\phi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \arctg \frac{A}{D} \quad (9.32)$$

<sup>5</sup> U to se možemo uveriti tako što zamenimo izraz (9.28) u jednačinu prinudnih oscilacija (9.26). Dobijeni izraz je jednak nuli za svako  $t$  jedino ako su koeficijenti uz  $\cos(\omega t)$  i  $\sin(\omega t)$  jednaki nuli. Tako se dobija sistem od dve jednačine po  $D$  i  $A$  čija su rešenja data sa (9.29).

<sup>6</sup>  $D \cos(\omega t) + A \sin(\omega t) = \sqrt{D^2 + A^2}(D' \cos(\omega t) + A' \sin(\omega t))$ , gde je  $D' = D/\sqrt{D^2 + A^2}$  i  $A' = A/\sqrt{D^2 + A^2}$ . Obzirom da je  $D'^2 + A'^2 = 1$  postoji ugao  $\phi$  takav da je  $D' = \cos(\phi)$  i  $A' = \sin(\phi)$ , tj.  $\tg(\phi) = A'/D' = A/D$ . Stoga je  $D \cos(\omega t) + A \sin(\omega t) = \sqrt{D^2 + A^2}[\cos(\phi) \cos(\omega t) + \sin(\phi) \sin(\omega t)] = \sqrt{D^2 + A^2} \cos(\omega t - \phi)$ .

**faza prinudnih oscilacija.** Partikularno rešenje (9.28), odnosno (9.30), je posebno po tome što neposredno opisuje **stacionarno stanje oscilovanja** sistema. Svako drugo partikularno rešenje  $x'_p(t)$  je oblika  $x'_p(t) = x_p(t) + x_h^{(0)}(t)$ , gde je  $x_h^{(0)}(t)$  neko rešenje homogene jednačine (9.27). Kako je nakon relaksacije  $x_h^{(0)}(t) \approx 0$ , to je dugovremensko ponašanje svakog partikularnog rešenja isto kao i za posebno rešenje (9.28), odnosno (9.30).

Trenutna vrednost snage  $P(t)$  koju na oscilatoru oslabadja prinudna sila je do na konstantu proporcionalnosti jednaka proizvodu  $f(t)\dot{x}$  te ćemo uprošćeno uzeti  $P(t) = f(t)\dot{x}$ . Na osnovu (9.29), u stacionarnom stanju oscilovanja je

$$\begin{aligned} P(t) &= -\omega f_0 D \sin(\omega t) \cos(\omega t) + \omega f_0 A \cos^2(\omega t) = \\ &= \frac{\omega f_0}{2} \left[ A - \sqrt{A^2 + D^2} \sin(2\omega t - \phi) \right], \end{aligned}$$

odakle se vidi da trenutna snaga osciluje sa ugaonom frekvencijom  $2\omega$  oko svoje **srednje vrednosti**

$$\bar{P} = \frac{\omega f_0}{2} A = \frac{f_0^2}{4\beta} \cdot \frac{(2\beta\omega)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2},$$

koja zavisi samo od amplitude apsorpcije  $A$  (otud ime!). Srednja snaga  $\bar{P}$  daje prosečnu energiju koji oscilator **apsorbuje** po jedinici vremena od izvora prinudne sile. Ona se troši na **savladavanje otpora** da bi se održalo stacionarno stanje oscilovanja.<sup>7</sup>

Pri fiksiranim  $\omega_0$  i  $\beta$ , srednja snaga  $\bar{P}$  je funkcija prinudne frekvencije  $\omega$ :

$$\bar{P}(\omega) = \bar{P}(\omega_0) \frac{(2\beta\omega)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}, \quad (9.33)$$

gde je

$$\bar{P}(\omega_0) = \frac{f_0^2}{4\beta} \quad (9.34)$$

srednja snaga koja se oslobadja na frekvenciji  $\omega = \omega_0$ . Srednju snagu je pogodno predstaviti u **skaliranom** obliku

$$\frac{\bar{P}(\omega)}{\bar{P}(\omega_0)} = \frac{(2\beta\omega)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}, \quad (9.35)$$

<sup>7</sup> U nekim fazama oscilovanja se za savladavanje otpora troši više **trenutne** snage, ali se te faze ciklično smenjuju sa fazama manjeg otpora kada se deo snage vraća izvoru sile. Razlika srednje i trenutne snage  $\frac{\omega f_0}{2} \sqrt{A^2 + D^2} \sin(2\omega t - \phi)$  zavisi i od amplitude disperzije  $D$ .

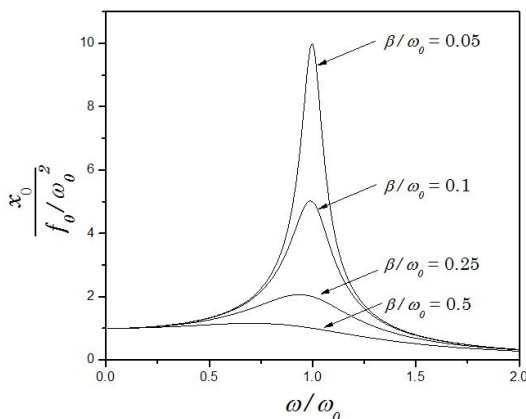
tj podeljenu sa  $\bar{P}(\omega_0)$ . Veličina

$$f_P(\omega) = \frac{(2\beta\omega)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}, \quad (9.36)$$

se naziva *funkcija odziva snage*, vidi sliku 9.6.

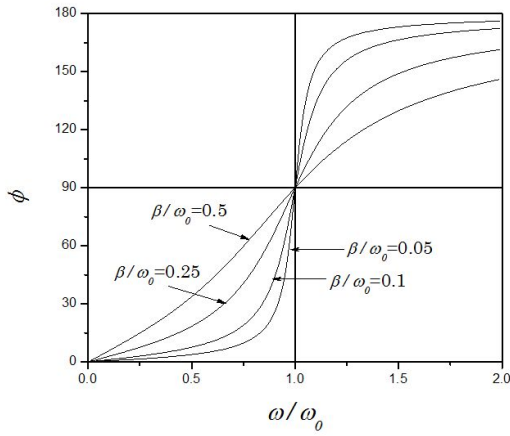
### Zavisnost odziva sistema od frekvencije prinudne sile

*Funkcija odziva* je svaka veličina čija se vrednost formira kao rezultat **odziva** sistema na spoljašnju prinudu. Za prinudne oscilacije takve su amplituda  $x_0$ , faza prinudnih oscilacija  $\phi$ , srednja snaga  $\bar{P}$ , amplituda disperzije  $D$  i amplituda apsorpcije  $A$ . Sve ove veličine zavise od prinudne frekvencije  $\omega$ , što ilustrujemo na narednim slikama. Kriva koja predstavlja zavisnost funkcije odziva od prinudne frekvencije se naziva *rezonantna* ili *spektralna* kriva.

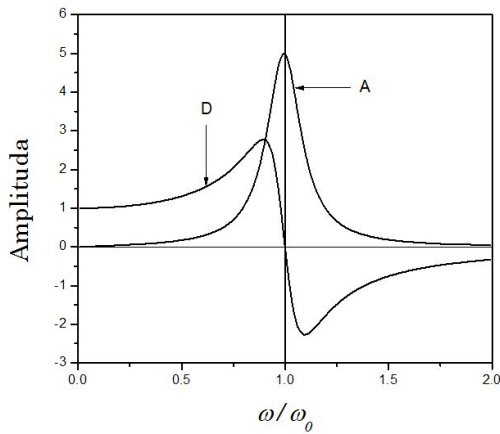


**Slika 9.2** Amplituda prinudnih oscilacija  $x_0$  u funkciji pobudne frekvencije  $\omega$  za četiri vrednosti koeficijenta prigušenja  $\beta$ . Sve veličine su skalirane ( $x_0$  je podeljeno sa  $f_0/\omega_0^2$ ,  $\omega$  i  $\beta$  sa  $\omega_0$ ) tako da budu **bezdimezionalne**.

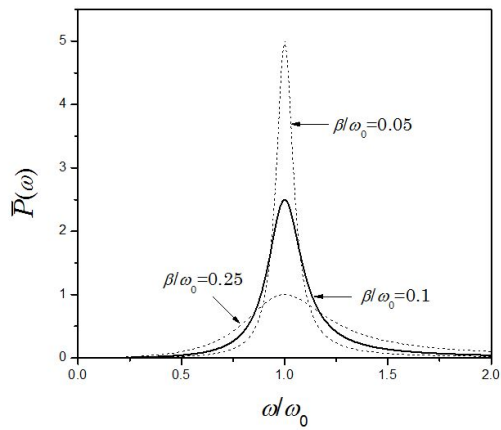




**Slika 9.3** Faza prinudnih oscilacija  $\phi$  u funkciji pobudne frekvencije  $\omega$ ; ugao  $\phi$  je u stepenima, a ostale većine su skalirane kao na slici 9.2. Za svako  $\beta$ , ugao  $\phi$  monotonno raste ka  $180^\circ$  kada  $\omega/\omega_0 \rightarrow \infty$ .



**Slika 9.4** Amplituda apsorpcije  $A$  i disperzije  $D$  u funkciji  $\omega/\omega_0$  pri  $\beta/\omega_0 = 0.1$ ; amplitude  $A$  i  $D$  su skalirane (tj podeljene) sa  $f_0/\omega_0^2$ .



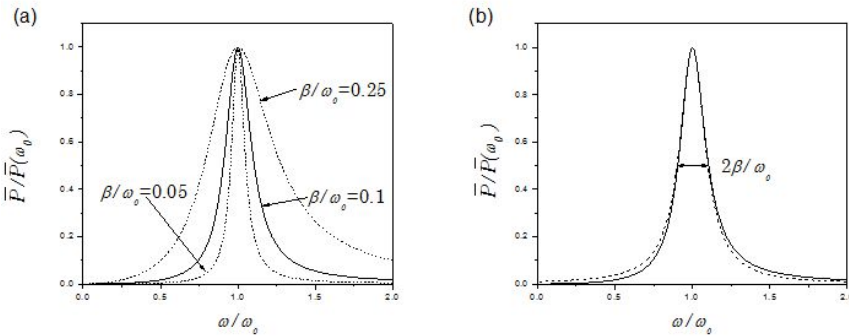
**Slika 9.5** Rezonantna (spektralna) kriva snage oscilatora: srednja snaga  $\bar{P}(\omega)$  u funkciji  $\omega/\omega_0$  za tri vrednosti  $\beta/\omega_0$  pri jediničnoj amplitudi prinudne sile  $f_0$ .

## Rezonanca

Za svako  $\beta$  srednja snaga  $\bar{P}(\omega)$  ima **maksimum**, jednak  $\bar{P}(\omega_0)$ , u tački  $\omega = \omega_0$  - vidi sliku 9.5. Alternativno, skalirana srednja snaga ima maksimum, jednak 1, za  $\omega/\omega_0 = 1$ , slika 9.6.

Kada je  $\omega = \omega_0$  kažemo da je oscilator u **rezonanci** sa izvorom prinudne sile, te za frekvenciju  $\omega_0$  kažemo da je **rezonantna frekvencija**. Na rezonantnoj frekvenciji izvor oslobadja maksimalnu snagu na oscilatoru, a i dve druge funkcije odziva, amplituda prinudnih oscilacija  $x_0$  i amplituda apsorpcije  $A$ , imaju maksimume u okolini ove frekvencije - vidi slike 9.2 i 9.4.

Što je manje  $\beta/\omega_0$  rezonanca je **oštrija** - rezonantne krive postaju sve više i uže. To znači da pri malom prigušenju oscilator može apsorbovati veliku energiju čak i pri maloj amplitudi prinudne sile<sup>8</sup>.



**Slika 9.6** Skalirana rezonantna (spektralna) kriva snage oscilatora. (a)  $\bar{P}/\bar{P}(\omega_0)$  u funkciji  $\omega/\omega_0$  za tri vrednosti  $\beta/\omega_0$ ; srednja snaga  $\bar{P}$  oslobodjena pri frekvenciji  $\omega$ , je podeljena srednjom snagom  $\bar{P}(\omega_0)$  koja se oslobadja pri  $\omega = \omega_0$ . Skalirane krive imaju **maksimum** (=1) za  $\omega/\omega_0 = 1$ , tj za  $\omega = \omega_0$ . (b) na krivoj za  $\beta/\omega_0 = 0.1$  duž sa strelicama pokazuje punu širinu na polovini visine ( $W/\omega_0 \approx 2\beta/\omega_0$ ). Isprekidanom linijom je dat Lorencov profil (9.38) za iste parametre  $\omega_0$  i  $\beta$ .

U okolini rezonantne frekvencije, tj za  $\omega \approx \omega_0$ , funkcija odziva snage se može pojednostaviti. Zaista, pri  $\omega \approx \omega_0$ , član  $(\omega_0^2 - \omega^2)^2$  se brzo menja jer sadrži brzo promenljivi faktor  $\omega_0 - \omega$ , dok su ostali članovi približno konstantni. Zato, uzimajući  $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$  i  $2\beta\omega \approx 2\beta\omega_0$ , možemo

<sup>8</sup> Teorijski, violinista može da sruši most ako dovoljno dugo proizvodi ton frekvencije jednake sopstvenoj frekvenciji mosta.

smatrati da je

$$f_P(\omega) \approx \frac{\beta^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}, \quad (9.37)$$

vidi krivu ucrtanu isprekidanom linijom na slici 9.6(b).

Funkcija

$$f_r(\omega) \equiv \frac{\beta^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}, \quad (9.38)$$

koja aproksimira odziv snage,  $f_P(\omega) \approx f_r(\omega)$ , se veoma često javlja u fizici i matematici. Npr, u matematici i optici ona se naziva **Lorencovim**, a u nuklearnoj fizici - **Brajt-Vignerovim** profilom.

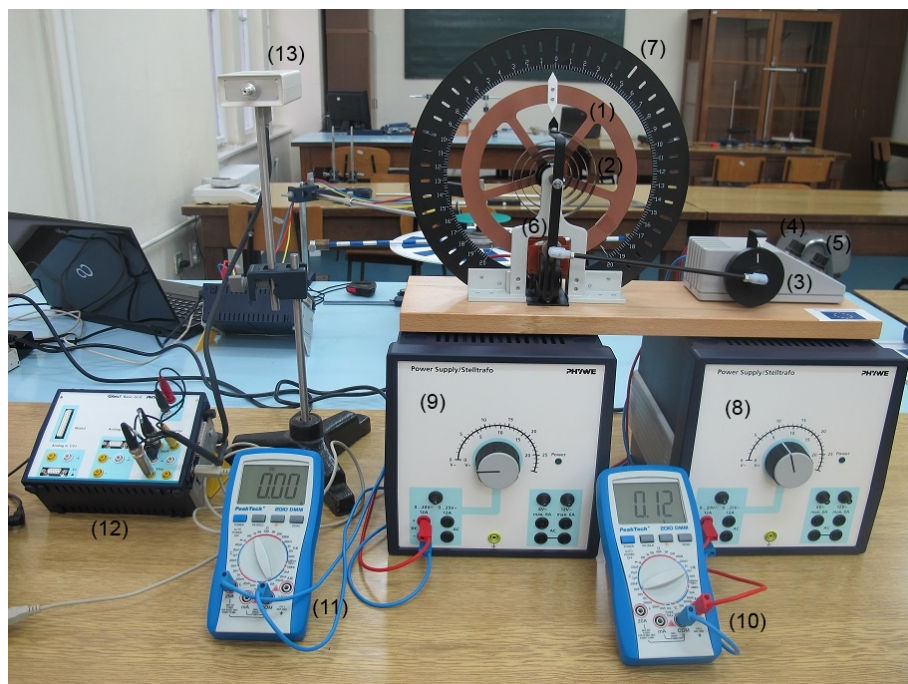
Uobičajeno je se krive koje imaju oblik pika mogu okarakterisati **punom širinom na polovini visine**  $W$ . Za Lorencov profil je

$$W = 2\beta, \quad (9.39)$$

a približno tolika je i puna širina za (neaproksimirani) odziv snage, slika 9.6(b).

## 9.4 Postavka eksperimenta

Aparatura za proučavanje prigušenih i prinudnih oscilacija, Polovo (Pohl) klatno, je prikazana na slici 9.7. Oscilacije vrši disk (sa paocima).



**Slika 9.7** Polovo klatno - aparatura za proučavanje prigušenih i prinudnih oscilacija. Osnovni delovi Polovog klatna su: (1) - disk koji osciluje; (2) - spiralna opruga za pobudjivanje oscilacija; (3) - motor koji daje pobudu; (4) / (5) - potenciometri za grubu / finu regulaciju broja obrtaja motora; (6) - prenosnik pobudne sile; (7) - disk sa skalom. Ostali delovi aparature su: (8) - izvor za napajanje motora; (9) - izvor za napajanje kočnice; (10) - multimer (za merenje napona napajanja motora); (11) - multimer (za merenje jačine struje kroz kočnicu); PHYWE Cobra 3 interfejs; (13) - PHYWE senzor kretanja (movement sensor).

## 9.5 Zadatak 1 - proučavanje prigušenih oscilacija

U toku ovog zadatka motor ne sme da radi - tj potencijometar na napajanju motora mora biti na nuli.<sup>9</sup>

Pre početka snimanja potrebno je povezati disk koji vrši oscilacije sa senzorom kretanja. Povezivanje se vrši koncem namotanim oko diska. Drugi kraj konca se prebaci preko žljeba većeg prečnika (12 mm) senzora kretanja i na njega okači mali teg (mase oko 1 g). Senzor kretanja mora biti povezan na PHYWE Cobra 3 interfejs, a interfejs povezan na kompjuter. Povezivanje senzora na interfejs i interfejsa na kompjuter radi nastavnik.

Kada se disk (rukom) izvede iz ravnotežnog položaja i pusti on će vršiti oscilacije. Oscilacije su prigušene i kada kroz kočnicu ne teče struja zbog gubitaka u spiralnoj opruzi. Prigušenju (značajno) doprinosi i senzor kretanja. Prigušenje se može menjati puštanjem struje kroz kočnicu čija se jačina meri multimerom. Jačina struje kroz kočnicu se reguliše potencijometrom na napajanju kočnice.

U ovom zadatku ćete snimiti prigušene oscilacije pri više različitih vrednosti struje prigušenja (0A, 0,3A, 0,6A, 1,2A i 2,4A). Nakon merenja na 2,4A **brzo** vratiti struju kočnice na nulu.

Pri svakoj struji prigušenja snimati na sledeći način:

1. Smiriti teg okačen na senzor kretanja.
2. Pokrenuti program za merenje PHYWE Measure - otvoriće se prozor za setovanje parametara merenja. Postaviti parametre merenja:
  - da se snima sa senzorom kretanja; Axle diameter 12 mm.
  - uključiti tab Rotation, pa u njemu:
    - u Display okviru čekirati prikaz samo ugaone brzine  $\omega(t)$ ;
    - u Record okviru čekirati samo merenje ugla rotacije  $\varphi(t)$ ;
    - postavite vreme uzorkovanja ("Get value") na 100 msec;
  - kada smo gotovi kliknuti na "Continue"; nakon toga otvara se dijalog za startovanje merenja.
3. Otkloniti rukom klatno približno do amplitude 15 na crnoj skali; klatno otkloniti držeći ga za paok najbliži igli.
4. Otpustiti klatno i startovati merenje.
5. Kada se klatno smiri zaustaviti merenje.
6. Program će otvoriti grafik sa snimljenim uglom  $\varphi(t)$  u funkciji vremena.

<sup>9</sup> Čak i kada je potencijometar napajanja na nuli multimer kojim merimo napon na motoru pokazuje mali napon ali se motor ne okreće.

7. Eksportujte podatke u "dat" fajl, otvorite ih u Table Curve 2D programu i naftujte.

Pri slabom prigušenju koristite korisničku funkciju (9.15):

$$Y = \#A * \text{EXP}(-\#B * X) * \text{COS}(\#C * X + \#D) + \#E$$

a pri jakom korisničku funkciju (9.24):

$$Y = \#A * \text{EXP}(-\#B * X) + \#C * \text{EXP}(-\#D * X) + \#E.$$

Na osnovu rezultata fita odredite ugaonu frekvenciju oscilacija  $\omega$ , period  $T$ , faktor prigušenja  $\beta$  i frekvenciju slobodnih oscilacija  $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$ . Pri slabom prigušenju nadjite logaritamski dekrement prigušenja  $\lambda = \beta T$  i faktor dobrote  $Q = \pi / \lambda$ . Procenite greške ovih veličina.

## 9.6 Zadatak 2 - proučavanje prinudnih oscilacija

U ovom zadatku ćete na prigušenju koje odabere nastavnik naći amplitudu  $x_0$  i fazu  $\phi$  prinudnih oscilacija u funkciji pobudne frekvencije  $\omega$ . Pobudnu frekvenciju ćete menjati promenom napona na motoru.

Merenje amplitude, faze i frekvencije prinudnih oscilacija na izabranom pobudnom naponu izvršiti na sledeći način:

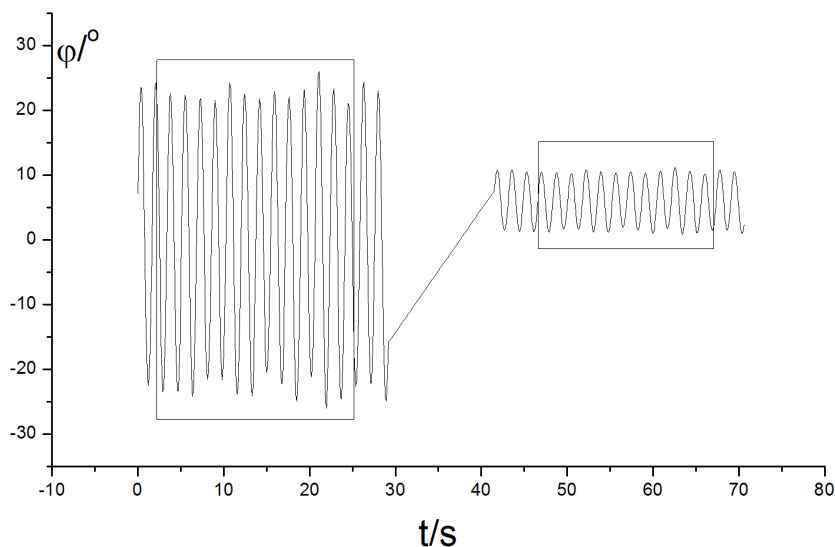
1. Prebacite konac povezan sa klatnom na širi žljeb (prečnika 12 mm) osovine senzora.
2. Postavite pobudni napon; položaj potencijometra (8) na napajanju motora određuje opseg napona koji možete regulisati potencijometrima za grubu (4) i finu (5) regulaciju broja obrtaja na motoru - vidi sliku 9.7.<sup>10</sup> Napon pobude da ne prelazi 12 V; napon merite multimerom (10).
3. Izmerite digitalnim hronometrom period oscilovanja pri tekućoj pobudi.
4. Sačekajte da oscilacije predju u stacionaran režim;<sup>11</sup> u ovom režimu maksimalna skretanja klatna na obe strane skale se (praktično) ne menjaju.
5. Nakon što oscilacije postanu stacionarne pokrenite program za snimanje i snimite oko 15 - 20 oscilacija. Nakon toga **ne prekidajući snimanje** skloniti

<sup>10</sup> Nastojte da potencijometri za grubu i finu regulaciju na motoru budu "negde oko sredine". Kada dodjete na kraj finog opsega pomerite potencijometar za grubu regulaciju. Kada potencijometar za grubu regulaciju dodje blizu kraja svog opsega, pomerite potencijometar na napajanju.

<sup>11</sup> Za Polovo klatno je obično dovoljno da se sačeka oko 30 s. Savetuje se, međutim, da vizuelno pratite maksimalna skretanja klatna na obe strane skale. Maksimalna skretanja na skali nisu ista sa obe strane zato što se ravnotežni položaj klatna ne nalazi na nuli skale već bliže senzoru; ovo zato što okačeni teg povlači klatno ka senzoru.

konac povezan na klatno sa osovine senzora i prebaciti ga preko senzora. Zatim na uži žljeb osovine senzora (prečnik 6 mm) postaviti konac povezan na pobudu i primiriti teg koji je na njegovom kraju. Nastaviti sa snimanjem još 15-20 oscilacija.

6. Zaustaviti merenje; program PHYWE Measure će otvoriti prozor u kojem će prikazati snimljene podatke slične podacima sa slike 9.8.



**Slika 9.8** Demo prikaz snimka prinudnih oscilacija Polovog klatna. Na levoj strani grafika je snimak prinudnih oscilacija klatna. Od 30 s do oko 40 s je ono što je senzor snimio dok je vršeno prebacivanje sa merenja oscilacija klatna na merenje pobude. Zatim sledi snimak pobude.

Podatke kao na slici 9.8 treba nafitovati na sinusnu funkciju **deo po deo**. Prvo je potrebno markirati deo grafika koji (približno) odgovara **stabilnim** prinudnim oscilacijama klatna. Podaci uokvireni većim pravougaonikom su približno takvi; markiramo ih koristeći alatku "Mark" u PHYWE Measure programu. Zatim kliknemo na alatku "Function fitting" i program otvora dijalog istog imena u kojem u "Function" okviru treba izabrati ugrađenu modelnu funkciju "sin oscillation" čiji analitički oblik glasi



$$a * \sin(bx + c) + d.$$

Ona zavisi od četiri parametra (a,b,c,d) koji redom igraju ulogu amplitude, ugaone frekvencije (u radijanima po sekundi), fazne razlike (u radijanima) i ofseta. Setujte "max. relative error" na  $11E - 6$  (krajnji desni položaj) a broj iteracija "max. iterations" na 1000. Kliknite na dugme "Parameters >>" pa u tabeli koja se otvara postavite početne vrednosti parametara "Starting values". Amplitudu ("a") i ofset ("d") procenite sa grafika, upišite 3 za "b"<sup>12</sup>, dok vrednost za faznu razliku "c" nije bitna jer ako su prethodni parametri zadovoljavajući program će se dalje sam snaći. Izaberite da je korak ("Step") svakog parametra oko 100 puta manji od njegove početne vrednosti. Na kraju kliknite na "Calculate".

Iterativnim postupkom program nastoji da nadje minimum sume kvadrata odstupanja. Ako nadje minimum, iteracije se zaustavljaju te program ispisuje parametre pri kojima je suma kvadrata minimalna (to su parametri najboljeg fita), kao i upotrebljeni broj iteracija.<sup>13</sup>

Fitovanjem u levom pravougaoniku nalazimo amplitudu  $x_0$ , ugaonu frekvenciju  $\omega_k$  i početnu fazu  $\phi_k$  prinudnih oscilacija klatna. Zatim ponavljamo proceduru na isti način, ali sa podacima koji odgovaraju pobudi - to su podaci uokvirenim desnim pravougaonikom. Tako dobijamo parametre pobude: amplitudu (koja nam ovde nije bitna), ugaonu frekvenciju  $\omega_p$  i početnu fazu  $\phi_p$ . Ugaona frekvencija pobude treba da je praktično jednaka ugaonoj frekvenciji klatna; za (zajedničku) ugaonu frekvenciju uzima aritmetičku sredinu ove dve veličine:  $\omega = (\omega_k + \omega_p)/2$ . Fazna razlika oscilacija u odnosu na pobudu je jednaka  $\phi = \phi_p - \phi_k$ .<sup>14</sup>

Merenje amplitude, faze i frekvencije prinudnih oscilacija izvršiti u dovoljnom broju tačaka; merenje započeti/završiti na naponu kada amplituda prinudnih oscilacija postane dvostruko veća/manja od amplitude pobude.<sup>15</sup> Dok je amplituda mala povećavati napon pobude u grubljim koracima (npr

<sup>12</sup> Ovo zato što je u skoro celom dostupnom opsegu period Polovog klatna oko 2 s, što  $\approx$  odgovara ugaonoj frekvenciji  $\omega \approx \pi \approx 3$ .

<sup>13</sup> Ako ne uspe da nadje minimum sume kvadrata devijacija program ispisuje vrednosti parametara na kojima je stao i ispisuje da je broj iteracija jednak zadatom "max. iterations". U ovoj situaciji treba ponoviti fitovanje, startujući od vrednosti parametara na kojima je program stao. Ako ni to ne uspe, treba povećati broj max. iterations, pa ponoviti fitovanje itd dok fitovanje ne uspe.

<sup>14</sup> Ukoliko se dobije vrednost izvan intervala  $[0, \pi]$ , dodajemo (ili oduzimamo)  $2\pi$  dovoljan broj puta dok ne dobijemo vrednost iz intervala  $[0, 2\pi]$ .

<sup>15</sup> Za Polovo klatno u našoj laboratoriji to je oblast napona pobude između 6 V i 10 V.

po 0,5 V). U oblasti oko maksimuma amplitude koristiti mali korak (npr ne veći od 0,1V).

Nacrtati grafik zavisnosti amplitude od pobudne frekvencije i fazne razlike od pobudne frekvencije. Pokušajte da te krive naitujete na modelnu funkciju (9.31) za amplitudu i modelnu funkciju (9.32) za faznu razliku. Fitovanje sprovesti u programu Table Curve 2D pomoću korisničkih funkcija:

$$Y=\#A/\text{SQRT}((\#B^2-X^2)^2+(2*\#C*X)^2)$$

za modelnu funkciju (9.31) za amplitudu (gde  $\#A \leftrightarrow f_0$ ,  $\#B \leftrightarrow \omega_0$ ,  $\#C \leftrightarrow \beta$ ) i

$$Y=\text{ATAN}(2*\#A*X/(\#B^2-X^2))$$

za modelnu funkciju (9.32) za faznu razliku (gde  $\#A \leftrightarrow \beta$ ,  $\#B \leftrightarrow \omega_0$ ). Ako fit uspe, navedite dobijene vrednosti za  $\omega_0$  i  $\beta$ , kao i njihove standardne greške. Prethodna dva fita bi trebalo da daju približno iste vrednosti za  $\omega_0$  i  $\beta$ .

# 10 Izučavanje dinamike rotacionog kretanja

---

## 10.1 Uvod

### Kinematika rotacije

Rotacijom oko ose  $\varpi$  za ugao  $\varphi$  zovemo pomeranje sistema kod kojeg za svaku tačku sistema postoji kružnica  $\mathcal{K}$  kroz čiji centar normalno prodire osa  $\varpi$  takva da se ta tačka može prevesti iz svog početnog u svoj krajnji položaj kretanjem za ugao  $\varphi$  po luku kružnice  $\mathcal{K}$ .

Kao što je poznato, osa je orijentisana prava, te se može govoriti o jediničnom vektoru te ose - to je jedinični vektor  $\vec{n}$  čiji je smer jednak smeru ose. Svaka osa je jednoznačno određena svojim jediničnim vektorom  $\vec{n}$  i jednom svojom tačkom.

Po dogovoru, ugao rotacije  $\varphi$  se meri u pozitivnom smeru (suprotno od smera kretanja kazaljke na satu) u orijentisanoj ravni čiji jedinični vektor ima isti smer kao i osa rotacije. SI jedinica za ugao je radijan (oznaka - rad); brojna vrednost punog ugla u radijanima je  $2\pi$ . Dobro je poznato da:

- rotacija za ugao  $\varphi$  i rotacija za ugao  $\varphi + 2\pi$  opisuju **isto** pomeranje u prostoru;
- ako se dato pomeranje može predstaviti kao rotacija za ugao  $\varphi$  oko ose  $\varpi$ , onda se ono može predstaviti i kao rotacija u odnosu na **suprotno** usmerenu osu, ali za ugao  $-\varphi$ , kao i da su ove dve ose **jedine** ose u odnosu na koje se dato pomeranje može predstaviti kao rotacija.
- na osnovu prethodnog, svaka rotacija se može jednoznačno predstaviti vektorom rotacije  $\vec{\varphi}$  čiji je ugao  $0 \leq \varphi < \pi$  jednak intenzitetu vektora rotacije; izuzetak su jedino rotacije za ugao  $\pi$  koje se mogu ravnopravno predstaviti sa dva vektora rotacije  $\vec{\varphi}$  i  $-\vec{\varphi}$  sa intenzitetom  $\pi$ .

Rotacije u odnosu na **istu** osu jediničnog vektora  $\vec{n}$  imaju lepo svojstvo da se **kompozicija** dve rotacije  $\varphi_1\vec{n}$  i  $\varphi_2\vec{n}$  može realizovati **jednom** rotacijom  $(\varphi_1 + \varphi_2)\vec{n}$  oko iste ose i da poredak rotacija **nije bitan**. Ovo lepo svojstvo se gubi kada se posmatraju rotacije za **konačne** uglove u odnosu na ose različitog

pravca; poredak rotacija postaje bitan, a vektor ugla rotacije više nije jednak zbiru vektora uglova rotacija.

Za rotaciju kažemo da je beskonačno mala (infinitesimalna) ako je ugao rotacije  $\varphi$  infinitesimalan. Infinitesimalnu rotaciju predstavljamo vektorom  $\vec{d\varphi} = d\varphi\vec{n}$ , gde je  $d\varphi$  infinitesimalni ugao rotacije, a  $\vec{n}$  jedinični vektor ose  $\varpi$ . Značaj infinitesimalnih rotacija leži u tome što, kao kod rotacija oko iste ose, poredak rotacija nije bitan, a kompoziciji infinitesimalnih rotacija  $\vec{d\varphi}_1$  i  $\vec{d\varphi}_2$  odgovara vektor  $\vec{d\varphi}_1 + \vec{d\varphi}_2$ .

Vektorom ugaone brzine

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

nazivamo količnik infinitesimalnog vektora rotacije  $\vec{d\varphi}$  i infinitesimalnog intervala vremena  $dt$  za koji je ova rotacija realizovana; jedinica za ugaonu brzinu je  $[\omega]=\text{rad/s}$ .<sup>†</sup>

Vektorom ugaonog ubrzanja

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

nazivamo prvi izvod vektora ugaone brzine po vremenu; jedinica za ugaono ubrzanje je  $[\alpha]=\text{rad/s}^2$ .<sup>‡</sup>

Rotacija je važan način kretanja. Pokazuje se da se svako pomeranje krutog dela može realizovati jednom translacijom (isti pomeraj svih delića) i jednom rotacijom (isti ugaoni pomeraj svih delića).

<sup>†</sup> Pored ove, u praksi se kao jedinica za ugaonu brzinu koristi i  $\circ/\text{s}$ , tj stepen po sekundi, ako i  $1/\text{s}$ , tj (broj) obrta po sekundi.

<sup>‡</sup> Kao jedinice za ugaono ubrzanje se koriste i  $\circ/\text{s}^2$ , tj stepen po sekundi na kvadrat, kao i  $1/\text{s}^2$ , tj (broj) obrta po sekundi na kvadrat.

### Moment sile i impulsa

Momentom sile  $\vec{F}$  u odnosu na pol  $O$  nazivamo veličinu

$$\vec{m}^O \equiv \vec{r}^{(O)} \times \vec{F},$$

gde je  $\vec{r}^{(O)}$  vektor položaja napadne tačke sile  $\vec{F}$  u odnosu na pol  $O$ .

Momentom impulsa materijalne tačke u odnosu na pol  $O$  (i posmatrača  $S$ ) nazivamo veličinu

$$\vec{l}^{(O)} \equiv \vec{r}^{(O)} \times \vec{p},$$

gde je  $\vec{p} = m\vec{v}$  vektor impulsa materijalne tačke (mase  $m$  i brzine  $\vec{v}$ ) u odnosu na posmatrača  $S$ , dok je  $\vec{r}^{(O)}$  vektor položaja iste tačke u odnosu na pol  $O$ .

Momentom sile na sistem, računatim u odnosu na pol  $O$ , zovemo sumu svih momenata  $\vec{m}^{(O)}$  sile koje deluju na sistem, tj

$$\vec{M}^{(O)} \equiv \sum \vec{m}^O.$$

Momentom impulsa sistema  $\vec{L}^{(O)}$  nazivamo sumu momenata impulsa  $\vec{l}^{(O)}$  svih materijalnih tačaka sistema, tj

$$\vec{L}^{(O)} \equiv \sum \vec{l}^{(O)}.$$

### Promene momenta impulsa i momenta sile pri promeni pola

Neka su  $O_1$  i  $O_2$  dva pola i neka je  $\vec{r}_{2,1} = \overrightarrow{O_1O_2}$  vektor položaja pola  $O_2$  u odnosu na pol  $O_1$ . Tada je:

$$\vec{L}^{(O_1)} = \vec{L}^{(O_2)} + \vec{r}_{2,1} \times \sum \vec{p},$$

gde je  $\sum \vec{p}$  impuls sistema.

Analogno je

$$\vec{M}^{(O_1)} = \vec{M}^{(O_2)} + \vec{r}_{2,1} \times \sum \vec{F}, \quad (10.1)$$

gde je  $\sum \vec{F}$  ukupna sila koja deluje na sistem. Iz ovog izraza se vidi da ukupni moment sile na sistem **ne zavisi od izbora pola** ako je ukupna sila na sistem jednaka nuli.

### Centar sila

**Centrom sila** nazivamo svaki pol u odnosu na kojeg je ukupni moment sila jednak nuli. Ako centar sila postoji,<sup>†</sup> tada iz (10.1) sledi da je i bilo koja tačka na pravoj kroz centar sile, a koja je paralelna ukupnoj sili  $\sum \vec{F}$ , takodje centar sile, tj položaj centra sile nije jednoznačan.

Može se pokazati da centar sile postoji za bilo koji sistem paralelnih sila. Specijalno, postoji centar sile Zemljine teže i može se uzeti da se poklapa sa centrom mase sistema.

### Zakon promene momenta impulsa

Neka je nadalje  $S$  inercijalni posmatrač. Vredi stav:

$$\frac{d\vec{l}^{(O)}}{dt} = \vec{m}^{(O)} - \vec{v}_O \times \vec{p},$$

gde je  $\vec{v}_O$  brzina pola  $O$  u odnosu na posmatrača  $S$ . Odavde se (sumiranjem po svim delićima sistema) nalazi da je

$$\frac{d\vec{L}^{(O)}}{dt} = \vec{M}^{(O)} - \vec{v}_O \times \vec{P},$$

gde je  $\vec{P} = \sum \vec{p}$  vektor impulsa sistema. Specijalno, za nepokretan pol ( $\vec{v}_O = 0$ ), ili pol uzet u centru mase sistema je

$$\frac{d\vec{L}^{(O)}}{dt} = \vec{M}^{(O)}.$$

Važno je naglasiti da ukupnom momentu sile doprinose samo spoljašnje sile na sistem. Moment unutrašnjih sila je jednak nuli, što se npr može dokazati uzimajući da se unutrašnje sile pokoravaju zakonu akcije i reakcije (III Njutnov zakon) i da su te sile centralne (tj sila interakcije bilo koja dva delića leži na pravcu na kojem se ti delići nalaze).

### Napadna tačka rezultujuće sile

Za razliku od slobodnih vektora (brzina  $\vec{v}$ , impuls  $\vec{p}$  ...) koji se mogu slobodno translirati u prostoru, postoje vektori koji nemaju ovu slobodu. Osnovni primer je sila - vektor **vezan za svoju napadnu tačku**. Vektor ukupne sile  $\sum \vec{F}$  nekog sistema sila nema napadnu tačku, što ostavlja mogućnost da mu se na

<sup>†</sup> Postoje sistemi sila za koje ne postoji centar sile.

neki pogodan način prudruži napadna tačka. Ako za sistem sile postoji centar sile tada se taj centar obično uzima za napadnu tačku rezultujuće sile, koju tada nazivamo **rezultantom**; ako je telo kruto i postoji rezultanta  $\vec{F}_{res}$  tada ona u potpunosti određuje kretanje tela jer se jednačina translacije svodi na

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{res} ,$$

a jednačina rotacije na

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{res} ,$$

gde je  $\vec{r}$  vektor položaja napadne tačke rezultante.

### Rotacije oko nepokretne ose

Kada se rotacije vrše oko nepokretne ose  $\varpi$  i pol za računanje momenta impulsa uzme negde (bilo gde) na osi rotacije, tada je moment impulsa materijalne tačke mase  $m$  na rastojanju  $r$  od ose  $\varpi$  dat sa

$$\vec{l} = I\vec{\omega} ,$$

gde je

$$I = mr^2 ,$$

**moment inercije** materijalne tačke oko ose  $\varpi$ .<sup>†</sup> Analogno, za ceo sistem vredi

$$\vec{L} = I_{sys}\vec{\omega} ,$$

gde je

$$I_{sys} \equiv \sum I = \sum mr^2 ,$$

**moment inercije sistema** oko ose  $\varpi$  dat sumom momenata inercije (oko iste ose) svih svojih materijalnih tačaka. SI jedinica za moment inercije je

$$[I] = \text{kg} \times \text{m}^2 ,$$

a u praksi se često koristi i  $\text{g} \times \text{cm}^2$ .

Moment inercije sistema je **aditivna** veličina i zavisi od položaja ose rotacije u odnosu na sistem. Ako osa prolazi kroz centar mase sistema tada kažemo da je moment inercije u odnosu na takvu osu **centralan**.

<sup>†</sup> U teorijskoj mehanici ćete naučiti da se moment inercije može definisati i u odnosu na pokretne ose. Cena je da moment inercije više nije skalarna, već znatno kompleksnija - tenzorska veličina.

Ako je posmatrani sistem kruto telo koje rotira oko nepokretne ose  $\varpi$  tada se njegov moment inercije (u odnosu na osu  $\varpi$ ) ne menja tokom vremena pa zakon promene impulsa sistema sa vremenom glasi

$$I_{sys}\vec{\alpha} = \vec{M},$$

gde je  $\vec{\alpha}$  vektor ugaonog ubrzanja.

Obzirom da vektori  $\vec{L}$ ,  $\vec{M}$ ,  $\vec{\omega}$  i  $\vec{\alpha}$  imaju isti pravac kao i osa, dovoljno je posmatrati njihove projekcije  $L$ ,  $M$ ,  $\omega$  i  $\alpha$  na osu  $\varpi$ . Tada vektorske jednačine možemo zameniti odgovarajućim skalarnim jednačinama:

$$\begin{aligned} L &= I_{sys}\omega, \\ I_{sys}\alpha &= M. \end{aligned}$$

### Teorema o paralelnim osama (Štajnerova teorema)

Za moment inercije  $I$  u odnosu na osu  $\varpi$  koja ne prolazi kroz centar mase sistema (tela) i centralni moment inercije  $I_c$  istog sistema kroz osu  $\varpi'$  **paralelnu** osi  $\varpi$  važi

$$I = I_c + md^2,$$

gde je  $m$  masa sistema, a  $d$  rastojanje izmedju osa  $\varpi$  i  $\varpi'$ .

### Teorema o normalnim osama za ravanske sisteme

Za momente inercije  $I_x$ ,  $I_y$  i  $I_z$  **ravanskog sistema** u odnosu na tri uzajamno normalne ose (ovde označene kao koordinatne ose  $x$ ,  $y$  i  $z$ ) koje se **seku** u jednoj tački vredi

$$I_z = I_x + I_y.$$

Uz pomoć ove teoreme možemo lako izračunati moment inercije ravanskih sistema u odnosu osu u ravni koja prolazi kroz tačku  $O$  u odnosu na koju je raspodela simetrije (rotaciono) simetrična. Dovoljno je uzeti  $x$  i  $y$  osu u toj ravni tako da se seku u tački  $O$  i postaviti  $z$  osu kroz  $O$  normalno na ravan. Tada je zbog simetrije raspodele mase  $I_x = I_y$  te je

$$I_x = I_z/2.$$

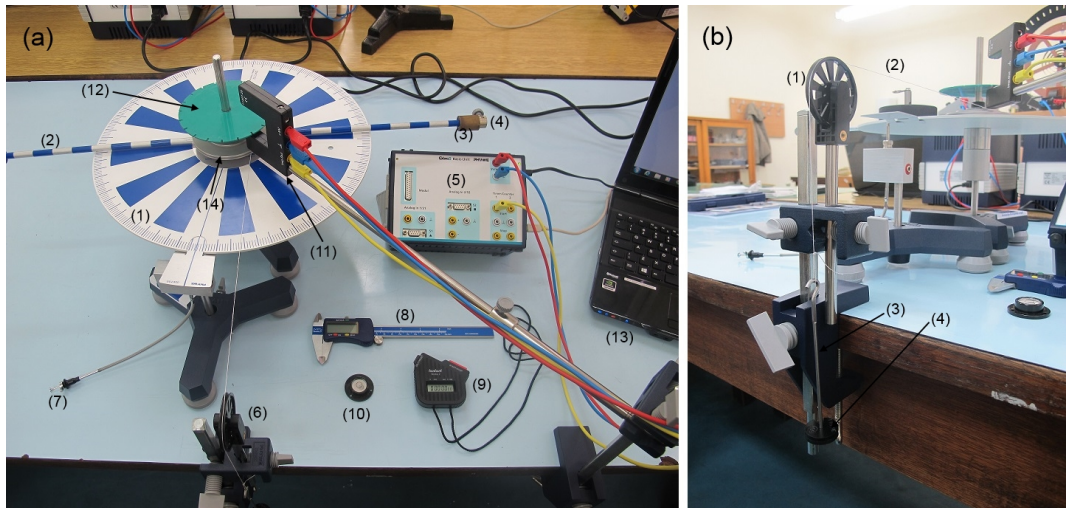
Kao primer, navedimo da je moment inercije ravanskog diska poluprečnika  $R$  u odnosu na osu u ravni koja prolazi kroz centar diska jednak

$$I = mR^2/4,$$



zato što je centralni moment inercije istog diska u odnosu na osu normalnu na ravan  $I_z = mR^2/2$ .

## 10.2 Opis aparature



**Slika 10.1** (a) - aparatura za izučavanje dinamike rotacionog kretanja.  
(b) - kotur sa tegom.

Aparatura za izučavanje dinamike rotacije, slika 10.1(a), se sastoji iz:

- (1) - rotacione platforme prečnika  $(35,00 \pm 0,01)$  cm, prečnika šupljine  $(1,922 \pm 0,002)$  cm i mase  $(827,2 \pm 0,1)$  g
- (2) - šipke dužine  $L = (65,065 \pm 0,005)$  cm;
- (3) - šuplji cilindar; (približno) isti takav cilindar se nalazi na drugom kraju šipke na istom rastojanju od ose rotacije kao i prvi;
- (4) - dva stezača na krajevima šipke čiji se položaj fiksira zavrtnjima i koji služe da šuplji cilindri ne spadnu sa šipke tokom rotacije;
- (5) - Cobra 3 interfejs - služi za povezivanje senzora sa kompjuterom;
- (6) - kotur sa tegom - vidi sliku (b); masa nosača tega je  $(10,0 \pm 0,1)$  g;
- (7) - kočnica;
- (8) - digitalni nonijus;

- (9) - digitalni hronometar;
- (10) - libela;
- (11) - svetlosna barijera (light barrier) koja se koristi kao senzor;
- (12) - disk sa zarezima; donji (žuti) kraj svetlosne barijere se postavlja par milimetara ispod diska tako da svetlost prolazi kroz njegove zareze;
- (13) - kompjuter;
- (14) - kanali za namotavanje konca.

Na slici 10.1(b) je dat uveličan prikaz delova kotura sa tegom:

- (1) - kotur;
- (2) - konac;
- (3) - nosač tega;
- (4) - teg.

Parametre šupljih cilindara (masu  $m_c$ , visinu  $H_c$ , spoljašnji prečnik  $D_c$  i unutrašnji prečnik koji je skoro jednak prečniku šipke  $D_b$  na koju se cilindri postavljaju) je potrebno izmeriti pre početka ostalih merenja. Stoga:

- izmeriti digitalnom vagom ukupnu masu šupljih cilindara te masu  $m_c$  uzeti kao polovinu izmerene vrednosti;
- izmeriti lenjirom sa nonijusom visinu svakog cilindra, te za  $H_c$  uzeti aritmetičku sredinu izmerenih vrednosti;
- na analogan način izmeriti prečnike  $D_c$  i  $D_b$ ;
- sračunati centralni moment inercije  $I_c$  šupljeg cilindra u odnosu na uzdužnu osu po formuli

$$I_c = \frac{m_c}{16} \left( D_c^2 + D_b^2 + \frac{4}{3} H_c^2 \right) .$$

Jednostavnosti radi stezače ćemo takodje smatrati za šuplje cilindre. Centralni moment inercije stezača u odnosu na uzdužnu osu izračunavamo po formuli

$$I_s = \frac{m_s}{16} \left( D_s^2 + D_b^2 + \frac{4}{3} H_s^2 \right) ,$$

gde je  $m_s$  masa,  $D_s$  - spoljašnji prečnik i  $H_s$  - visina stezača, koje je potrebno izmeriti.

Kada su stezač i šuplji cilindar naslonjeni jedan na drugog centar mase sistema (cilindar + stezač) se nalazi na rastojanju

$$d_m = \frac{H_s}{2} + \frac{\mu}{2m_s} H$$

od slobodnog kraja stežaka, a centralni moment inercije  $I_0$  ovog sistema u odnosu na uzdužnu osu po Štajnerovoj teoremi iznosi

$$I_0 = I_c + I_s + \frac{\mu H^2}{4}, \quad (10.2)$$

gde je

$$\mu = \frac{m_c m_s}{m_c + m_s}$$

redukovana masa, a

$$H = H_c + H_s$$

visina sistema (cilindar + stežak). Masa ovog sistema je  $m_0 = m_c + m_s$

## 10.3 Eksperimentalna procedura

### Zadatak 1 - merenje ugaonog ubrzanja

Kada postavimo teg na nosač tegova, povežemo nosač lakim i neistegljivim koncem preko kotura na jedan od kanala za vezivanje konca, pa sistem za izučavanje dinamike rotacije prepustimo sebi, tegovi će se spuštati a platforma rotirati. Jednačina rotacije glasi

$$I_{rot}\alpha = RT - M_t,$$

gde je  $I_{rot}$  moment inercije dela sistema koji vrši rotaciju,  $\alpha$  je njegovo ugaono ubrzanje,  $R$  je poluprečnik kanala preko kojeg je konac namotan,  $T$  je sila zatezanja konca, dok je  $M_t$  moment trenja klizanja u ležištu platforme. Jednačina translatornog kretanja tega i nosača duž vertikale glasi

$$ma = mg - T,$$

gde je  $m$  masa tega i nosača,  $a$  je translatorno ubrzanje u smeru naniže,  $g$  je ubrzanje Zemljine teže, dok je  $T$  sila zatezanja konca. Zanemareni su: otpor vazduha, težina konca, kao i moment inercije i trenje u ležištu kotura preko kojeg je konac prebačen. Uz to je

$$a = R\alpha,$$

jer je konac neistegljiv. Iz prethodne tri jednačine nalazimo da ugaono ubrzanje iznosi

$$\alpha = \frac{mgR - M_t}{I_{rot} + mR^2}. \quad (10.3)$$

Pri malim brzinama rotacije moment trenja  $M_t$  je približno konstantan te je i ugaono ubrzanje konstantno.

U ovom zadatku je potrebno izvršiti merenje ugaonog ubrzanja pri najudaljenijem položaju šupljih cilindara u odnosu na osu rotacije. U tu svrhu:

- Postaviti stezače na sam kraj šipke, pa pomeriti šuplje cilindre do stezača i pričvrstiti stezače da šuplji cilindri ne bi spali tokom rotacije; sračunati rastojanje

$$d = L/2 - d_m$$

od ose rotacije do centra mase sistema (cilindar + stezač);  $L$  je dužina šipke, a  $d_m$  je rastojanje od kraja slobodnog kraja stezača do centra mase sistema (cilindar + stezač).

- Dodati teg mase 30 g na nosač tegova (mase oko 10 g) pa na digitalnoj vagi izmeriti ukupnu masu  $m$  dodatog tega i nosača tegova.
- Izmeriti lenjirom sa nonijusom prečnik srednjeg kanala za namotavanje konca - vidi (14) na slici 10.1. Vodite računa o dubini žljeba. Zatim namotati konac na ovaj kanal, prebaciti konac preko kotura tako da konac tangira kanal. Na suprotni (donji) kraj konca vezati nosač tegova sa tegom.

Zatim:

(1) - u PHYWE Measure softverskom paketu izabrati merač "Light barrier" i isključiti opciju "Oscillating movement"; vrednost parametra "Axle diameter" nije bitna za ovo merenje. Izabrati "Rotation" tab i u njemu čekirati prikazivanje ugaone brzine i snimanje ugla rotacije, ugaone brzine i ugaonog ubrzanja; setovati vreme uzorkovanja na 100 ms.

(2) - startovati merenje dok sistem miruje sa "Start Measurement" u PHYWE Measure softveru. Otpustiti sistem nakon čega teg počinje da se spušta. Nakon što teg padne na pod zaustaviti merenje. Izmerene podatke eksportovati u tri tekstualna fajla sa ekstenzijom ".dat" (kliknite na "Measure" na glavnom meniju PHYWE programa, zatim na stavku "Export data..." padajućeg menija; otvoriće se "Export data" dijalog u kojem izaberite opciju "Save to file" i opciju "Export as numbers", pa kliknite na "OK"; iza toga se otvara standardni Windows dijalog pomoću kojeg ćete sačuvati fajl; ne zaboravite da iza imena fajla upišete ".dat").

(3) - za svaku od izmerenih veličina nacrtati njen grafikon u funkciji vremena uz pomoć softverskog paketa Table Curve 2D. Grafici bi trebalo da pokazuju da ugaono ubrzanje raste kvadratno sa vremenom,  $\varphi(t) = \alpha t^2/2$ , da ugaona brzina

raste linearno sa vremenom,  $\omega(t) = \alpha t$ , a da je ugaono ubrzanje  $\alpha(t)$  približno konstantno.<sup>†</sup>

Ugao ubrzanje odrediti iz snimljenih podataka za ugao rotacije koje treba naitovati na parabolu u PHYWE Measure programu. Pre početka fitovanja isključiti prikaz ugaone brzine i ugaonog ubrzanja, pa markirati interval vremena u kojem ćete izvršiti fitovanje. To bi trebalo da bude onaj interval u kojem sistem rotira a da teg nije dodirnuo pod.

Radi pouzadnijeg merenja ugaonog ubrzanja, ponoviti merenje pet puta. Isključiti merenje svih veličina osim ugla rotacije. Podatke fitovati u PHYWE Measure programu. Za izmerenu vrednost ugaonog ubrzanja uzeti aritmetičku sredinu rezultata pojedinačnih merenja, a za grešku standardnu devijaciju ove serije.<sup>†</sup>

### Zadatak 2 - određivanje momenta inercije sistema

Nepoznati moment inercije sistema  $I$  se može izmeriti tako što se nakon merenja iz prethodnog zadatka, u kojem smo odredili ugaono ubrzanje  $\alpha_1$  pri najdaljem položaju šupljih cilindara od ose rotacije, isti cilindri postave najbliže osi rotacije, pa se (kao u zadatku 1) izmeri ugaono ubrzanje  $\alpha_2$  za ovaj položaj šupljih cilindara. U tom cilju potrebno je na oba kraja šipke izmeriti nonijusom rastojanje od kraja šipke do početka bližeg stezača, naći aritmetičku sredinu  $d'$  ova dva merenja, te sračunati (srednje) rastojanje

$$d = L/2 - d_m - d'$$

od ose rotacije do centra mase sistema (cilindar + stezač).

Kada se centar sistema (cilindar + stezač) nalazi na rastojanju  $d$  od ose rotacije tada je po Štajnerovoj teoremi ukupni moment inercije jednak  $I_{rot} = I + 2(I_0 + m_0 d^2)$ , gde se faktor 2 javlja zato što na svakom kraju šipke imamo po jedan cilindar i stezač. Pri dva (različita) rastojanja  $d_1$  i  $d_2$  (cilindara + stezača) od ose rotacije jednačine kretanja glase:

$$\begin{aligned} (I + 2I_0 + 2m_0 d_1^2 + mR^2) \alpha_1 &= mgR - M_t, \\ (I + 2I_0 + 2m_0 d_2^2 + mR^2) \alpha_2 &= mgR - M_t, \end{aligned}$$

<sup>†</sup> Akvizicioni sistem snima ugaonu brzinu  $\omega$  preko broja prekida snopa svetlosti svetlosne barijere tokom inkrementa vremena - kratkog intervala vremena kojeg bira korisnik. Kako je broj prekida diskretna veličina, snimljene vrednosti za ugaonu brzinu su "šumovite" (što manji inkrement vremena to veći šum).

Iz ovih podataka program izračunava ugaono ubrzanje  $\alpha$  kao prvi **numerički izvod** ugaone brzine po vremenu, te su podaci za ugaono ubrzanje još šumovitiji. Stoga je provera da je  $\omega(t) \sim t$ , a  $\alpha(t) \approx const$  samo **kvalitativna**.

<sup>†</sup> Za seriju izmerenih podataka  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , aritmetička sredina je  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$ , a kvadrat standardne devijacije je  $S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ .

gde je  $\alpha_1$  ugaono ubrzanje pri rastojanju  $d_1$ , a  $\alpha_2$  ugaono ubrzanje pri rastojanju  $d_2$ . Odavde je

$$I = 2m_0 \frac{d_2^2 \alpha_2 - d_1^2 \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} - 2I_0 - mR^2. \quad (10.4)$$

Zanemarujući greške za  $m_c$ ,  $m$ ,  $I_c$ ,  $R$ ,  $d_1$  i  $d_2$ , sračunati apsolutnu grešku za  $I$  po formuli

$$\Delta I = 2m_0 \frac{d_2^2 - d_1^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} (\alpha_1 \Delta \alpha_2 + \alpha_2 \Delta \alpha_1),$$

gde su  $\Delta \alpha_1$  i  $\Delta \alpha_2$  greške za ugaona ubrzanja  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ .

Zadatak 3 - određivanje momenta otpora vazduha  $M_d$  u funkciji ugaone brzine  $\omega$

Na telo koje se kreće kroz vazduh deluje otpor vazduha koji se opire kretanju i nastoji da zaustavi telo. Pri **rotaciji** tela u vazduhu moment otpora vazduha se može uzeti u obliku

$$M_d = -c\omega^2, \quad (10.5)$$

gde znak  $-$  ukazuje da ovaj moment sile nastoji da zaustavi rotaciju tela. Veličina  $c$  zavisi od oblika tela koje rotira i položaja ose rotacije u odnosu na telo. Iako  $c$  zavisi i od ugaone brzine,  $\varpi$ .<sup>†</sup> u našim eksperimentalnim uslovima se može uzeti da je  $c$  približno konstantno. Stoga jednačina kretanja tela koje rotira u vazduhu i na koje deluju **samo** moment trenja klizanja  $M_t$  i moment otpora vazduha  $M_d$  glasi

$$I \frac{d\omega}{dt} = -(M_t + c\omega^2). \quad (10.6)$$

Pri malim ugaonim brzinama član  $c\omega^2$  je zanemariv u odnosu moment trenja klizanja u ležištu  $M_t$  te se tada jednačina kretanja svodi na jednačinu

$$I \frac{d\omega}{dt} = -M_t, \quad (10.7)$$

odakle se vidi da je pad ugaone brzina na nulu približno linearan.

Razdvajanjem promenljivih u diferencijalnoj jednačini kretanja (10.6) dobijamo jednačinu za totalne diferencijale

$$\frac{d\omega}{1 + c\omega^2/M_t} = -\frac{M_t}{I} dt,$$

čijom se integracijom, pri ugaonoj brzini  $\omega_0$  u početnom trenutku vremena  $t_0 = 0$ , dobija

$$\arctg(\omega\sqrt{c/M_t}) = \psi_0 - \frac{\sqrt{cM_t}}{I} t,$$

gde je  $\psi_0 = \arctg(\omega_0\sqrt{c/M_t})$ . Odavde nalazimo da se ugaona brzina menja sa vremenom po zakonu

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{M_t}{c}} \operatorname{tg} \left( \psi_0 - \frac{\sqrt{cM_t}}{I} t \right), \quad (10.8)$$

<sup>†</sup> Npr  $c \sim 1/\omega$  pri veoma sporim rotacijama te je tada  $M_d \sim \omega$ .

a ugao rotacije po zakonu

$$\varphi(t) = \frac{I}{c} \left\{ \ln \left[ \cos \left( \psi_0 - \frac{\sqrt{cM_t}}{I} t \right) \right] - \ln [\cos(\psi_0)] \right\}, \quad (10.9)$$

koji se dobija integracijom zavisnosti (10.8) po vremenu uz uslov da je u početnom trenutku  $\varphi(0) = 0$ .

Obzirom da je moment inercije  $I$  odredjen u prethodnom zadatku, veličine  $M_t$  i  $c$  se, zajedno sa  $\varphi_0$ , mogu tretirati kao nepoznati parametri funkcionalne zavisnosti  $\varphi(t)$ . Stoga zadatak 3 glasi:

- Ukloniti okačeni teg iz prethodnog zadatka, oba šuplja cilindra i stezače sa šipke rotacionog sistema.
- U PHYWE softverskom paketu setovati prikazivanje ugaone brzine i snimanje ugla rotacije. Postaviti vreme uzorkovanja na 100 ms. Setovati stepen ( $^\circ$ ) kao jedinicu za ugao.
- Zavrteti rukom sistem dok ne dostigne ugaonu brzinu 800-1000  $^\circ$ /s i prepustiti sistem samom sebi.
- Snimiti ugao rotacije  $\varphi$  u funkciji vremena  $t$ . Snimanje započeti kada ugaona brzina padne na  $\sim 700$   $^\circ$ /s, a završiti na ugaonoj brzini od  $\sim 40$   $^\circ$ /s. Eksportovati podatke kao brojeve u tekstualni fajl sa ekstenzijom "dat".
- Pomoću programa Table Curve 2D otvoriti fajl sa snimljenim podacima, pa odrediti  $M_t$  i  $c$  i njihove greške nelinearnim fitovanjem podataka za ugao rotacije na modelnu funkciju (10.9). Korisničku funkciju uzeti u obliku:

I=...

$$Y=(I/\# A)*(LN(COS(\# B - \text{SQRT}(\# A * \# C)*X/I))-LN(COS(\# B))).$$

U prvom redu zapisa,  $I$  je konstanta korisničke funkcije za koju iza znaka jednakosti treba (umesto ...) uneti brojnu vrednost u SI jedinicama ( $\text{kgm}^2$ ) dobijenu u zadatku 2 za moment inercije sistema  $I$ . Parametar  $\# A$  korisničke funkcije odgovara parametru  $c$  modelne funkcije,  $\# B$  odgovara  $\psi_0$  (i nije nam bitan), dok  $\# C$  odgovara  $M_t$ .

Pre početka fitovanja potrebno je postaviti probne vrednosti parametara  $\# A$ ,  $\# B$  i  $\# C$ ; ovo uraditi koristeći alatku "Adjust" programa Table Curve 2D; ovu alatku pokrenuti klikom na dugme "Adjust" u prozoru "User Functions", nakon čega se otvara prozor "Inspect and Adjust UDF" u kojem se može izvršiti izbor probnih vrednosti parametara.



## Zadatak 4 - provera zakona održanja energije

**Postupak 1:**

Zakon održanja energije se može proveriti tako što se oko diska namota konac pa se na njegov kraj veže teg preko kotura. Sistem se pusti iz stanja mirovanja. Jednačine kretanja su

$$I\alpha = RT,$$

$$ma = mg - T,$$

čemu treba dodati vezu

$$a = R\alpha,$$

usled neistegljivost konca;  $m$  je masa tega,  $a$  je ubrzanje tega,  $I$  je moment inercije diska,  $R$  njegov poluprečnik, dok je  $\alpha$  ugaono ubrzanje diska. Oдавde je  $T = m(g - a) = m(g - R\alpha)$ , pa je  $\alpha = mgR/(I + mR^2) = \text{const}$  ugaono ubrzanje. Dalje je  $\omega = \alpha t$ ,  $\varphi = \alpha t^2/2$ ,  $v = R\omega$  i  $s = R\alpha t^2/2$ . Mereći gravitacionu potencijalnu energiju od početnog položaja imamo

$$0 = mv^2/2 + I\omega^2/2 - mgs,$$

tj

$$mv^2/2 + I\omega^2/2 = mgs.$$

Za direktnu proveru nam je potreban senzor rotacije i senzor položaja, ali bi moglo da se radi i sa samo jednim senzorom.

**Postupak 2:**

Ista konfiguracija ali sa labavim koncem a disku se na početku saopšti neka kinetička energija i to tako da konac počne da se namotava oko diska pa kada se konac zategne teg počinje da se diže. U najvišoj tački i disk i teg miruju a teg je dobio gravitacionu potencijalnu energiju  $mgh$ . Kako na početku postoji samo kinetička energija diska  $E_k = I\omega^2/2$  to je

$$mgh = I\omega^2/2.$$

**Postupak 3:**

Povežemo aparaturu kao na slici 1 PHYWE uputstva 1.3-P2131315.pdf. Vežemo jedan kraj konca za obod najmanjge diska ( $R = 15\text{mm}$ ) a na drugi kraj konca vežemo teg. Konac prebacimo preko kotura svetlosne barijere (služi za merenje rotacije) udaljene npr 1m od osovine aparature; teg može ide samo gore-dole.

Sve dok je namotan na jednu ili drugu stranu malog diska, konac je tangentan na tu stranu malog diska te zaklapa mali ugao sa pravcem ka centru, npr  $\sim 1^\circ$ . Kada konac menja stranu namotavanja menja se za malo i njegov pravac, ali je ova promena mala, npr  $\sim 2^\circ$ .

Zaokrenemo disk u jednu stranu. Konac se delimično namota a teg podigne. Pustimo sistem iz stanja mirovanja. Teg počinje da se spušta, disk da rotira, a konac odmotava. To ide tako dok se tačka na obodu malog diska u kojoj je vezan teg ne nadje na pravcu svetlosne barijere. Nakon toga sistem diskova zbog inercije nastavlja da se vrti u istu stranu a konac počinje da se namotava oko malog diska u "suprotnom smeru" pa teg počinje da se diže. Sve ovo usporava sistem diskova koji se na kraju zaustavlja. Tada i teg miruje na visini koja bi trebalo da je jednaka početnoj visini. Nakon ovog momenta počinje novo odmotavanje konca.

Opisani proces bi trebalo da se periodično ponavlja. Zbog prisustva sila trenja proces se međjutim zaustavlja nakon nekog broja oscilacija.

Aparatura bi trebalo da meri promenu ugla u funkciji vremena; time dobijamo i promenu položaja tega. Diferenciranjem ove zavisnosti dobijamo brzine: ugaonu brzinu sistema diskova i brzinu tega duž vertikale. Još jednim diferenciranjem po vremenu bi dobili ubrzanja: ugaono i linearno.

Da nema trenja ugaono ubrzanje bi dok teg ide na dole trebalo da iznosi

$$\alpha = \frac{mgR}{I + mR^2},$$

### Zadatak 5 - provera zakona održanja momenta impulsa (opciono)

Kada se na platformu koja rotira<sup>†</sup> ugaonom brzinom  $\omega_0$  ispusti sa **male** visine iz stanja mirovanja šuplji disk dolazi do apsolutno neelastičnog sudara diska i platforme nakon kojeg ispušteni disk nastavlja da se kreće zajedno sa platformom istom ugaonom brzinom. Pre spuštanja diska na platformu moment impulsa celog sistema je  $L = I\omega_0$ , gde je  $I$  moment inercije rotirajućeg dela aparature izmeren u zadatku 2. Nakon što spušteni disk počne da rotira zajedno sa ostatkom sistema, ugaona brzina padne sa  $\omega_0$  na  $\omega'$  u skladu sa zakonom održanja momenta impulsa sistema

$$I\omega_0 = (I + I_d)\omega', \quad (10.10)$$

gde je

$$I_d = m_d [(D_s^2 + D_u^2)/8 + d_d^2], \quad (10.11)$$

<sup>†</sup> Šuplji cilindri i stezači moraju biti skinuti sa šipke.

moment inercije ispuštenog diska;  $D_s$  i  $D_u$  su spoljašnji i unutrašnji prečnik diska, dok je  $d_d$  rastojanje centra diska od ose rotacije sistema.

Proveru zakona održanja momenta impulsa izvršiti na sledeći način:

1. Izmeriti digitalnom vagom masu  $m_d$  šupljeg diska koji se ispušta na rotirajuću platformu.
2. Izmeriti lenjirom sa nonijusom unutrašnji prečnik  $D_u$  i spoljašnji prečnik  $D_s$  tog diska.
3. U PHYWE softverskom paketu setovati vreme uzorkovanja na minimalnu vrednost (20 ms), čekirati prikazivanje i snimanje ugaone brzine, a jedinicu za ugaon postaviti na stepen ( $^\circ$ ).
4. Zarotirati platformu do male ugaone brzine i kad ona ona padne na  $\sim 150^\circ/\text{s}$  startovati merenje.
5. Ispustiti disk na platformu sa visine od oko 5 mm nastojeći da se on ne sudari sa šipkom.
6. Nastaviti sa merenjem narednih  $\sim 10$  s.
7. Zaustaviti rotaciju i eksportovati podatke u tekstualni fajl sa ekstenzijom "dat".
8. Izmeriti rastojanje  $d_d$  ispuštenog diska od ose rotacije.
9. Sračunati moment inercije ispuštenog diska  $I_d$  po formuli (10.11).
10. Nacrtati grafik  $\omega(t)$  u Table Curve 2D softverskom paketu. Pre ispuštanja diska ugaona brzina lagano pada po linearnom zakonu zbog trenja u ležištu, zatim tokom apsolutno neelastičnog sudara diska i platforme dolazi do naglog pada ugaone brzine koji se nakon sudara nastavlja blagim linearnim padom usled trenja u ležištu.
11. Odrediti fitovanjem ugaone brzine  $\omega_0$  i  $\omega'$  i proveriti da li je u granicama eksperimentalne greške zadovoljeno održanje momenta impulsa (10.10).