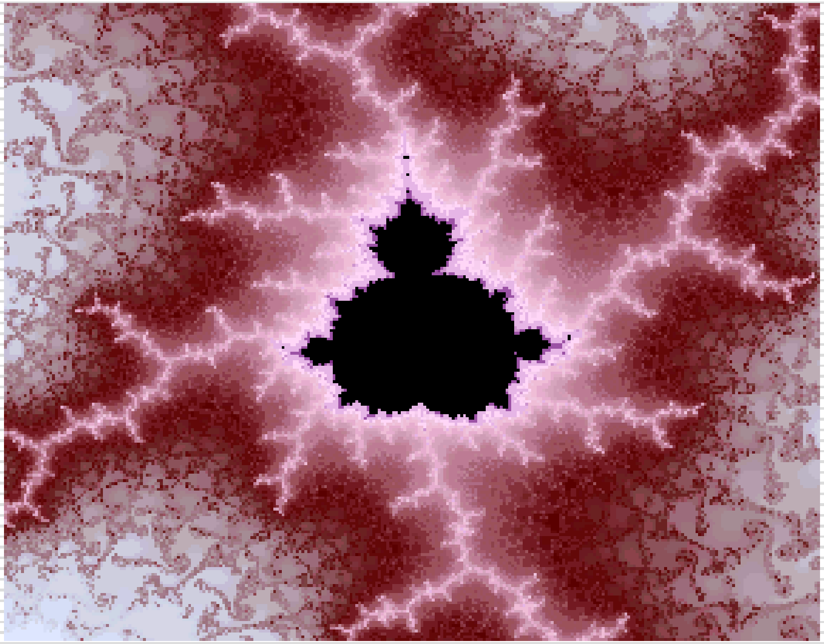
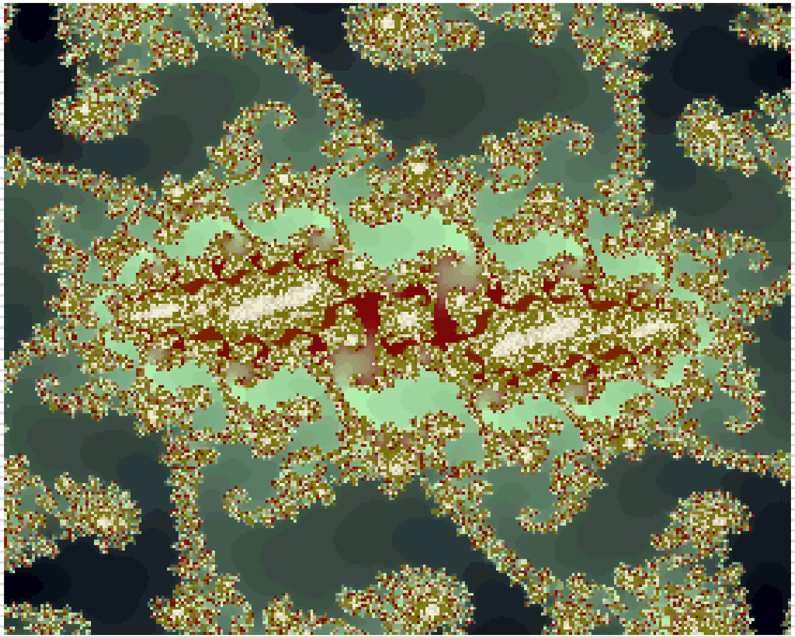
Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

Манделбротов скуп и скупови Џулија





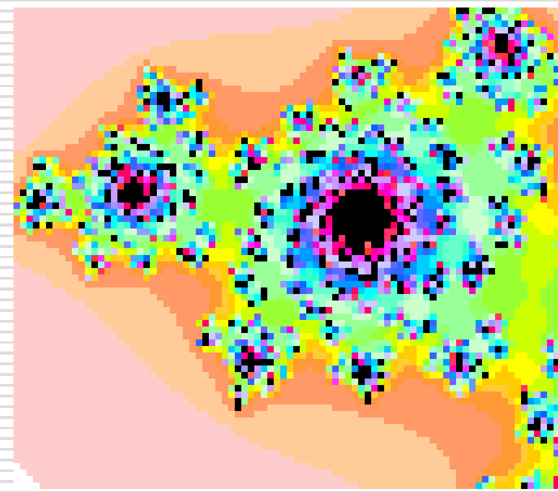
Математика у архитектури 1
Проф. др Љиљана Петрушевски

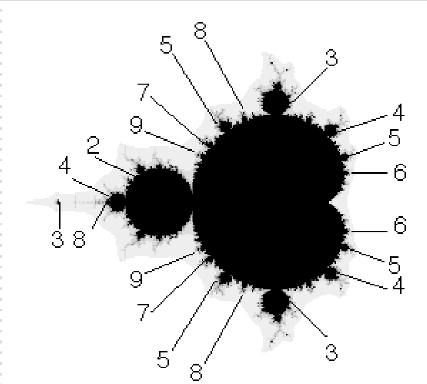
Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

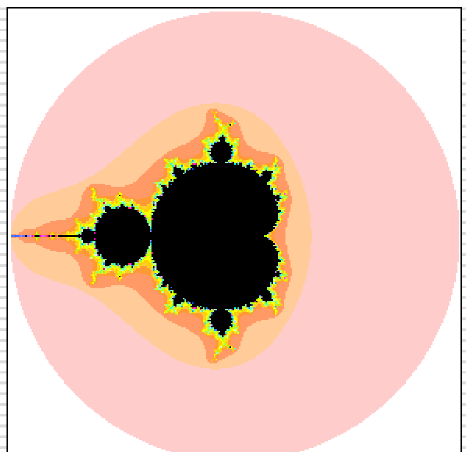
Манделбротов скуп и скупови Џулија

Манделбротов скуп представља јединство једноставности и комплексности. Веома једноставне формуле које садрже само множење и сабирање комплексних бројева генеришу веома сложене и природно лепе фигуре – слике са бесконачно много варијација.

$$(x + iy)^2$$







Манделбротов скуп и скупови Џулија
комплексне итерације

Итеративни процес у комплексној равни који генерише Манделбротов скуп и Џулија скупове је облика

$z \to z^2 + c$ где су z и c комплексни бројеви.

Процес започиње избором комплексних бројева z_0 и c, и полазећи од њих генерише се низ комплексних бројева

$$z_1 = z_0^2 + c$$
$$z_2 = z_1^2 + c$$
$$z_3 = z_2^2 + c$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

У општем облику

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

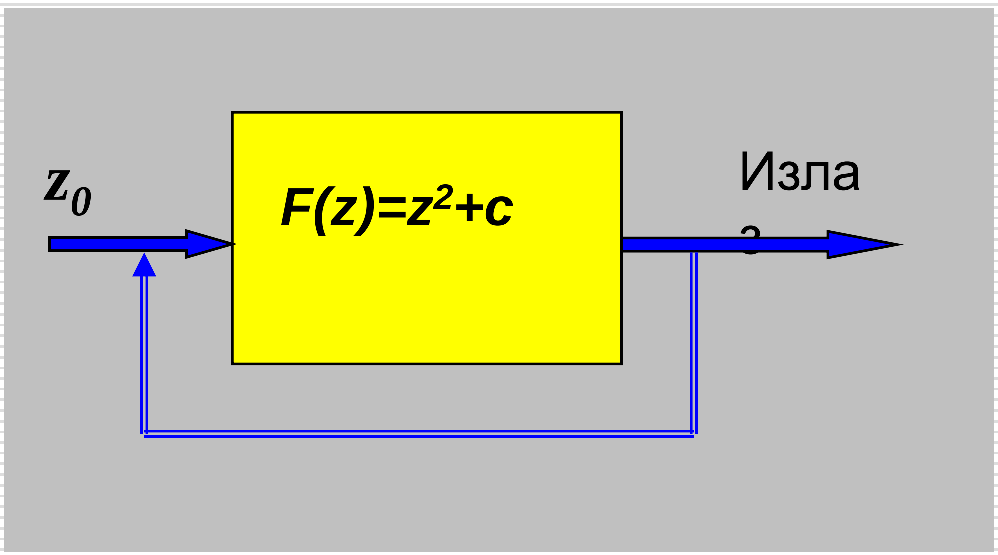
z_0 - почетна вредност

c - параметар

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури

Манделбротов скуп и скупови Џулија
комплексне итерације

Описан итративни процес
$z \to z^2 + c$, где су z и c комплексни бројеви, представља типичан пример итеративног функционалног система.

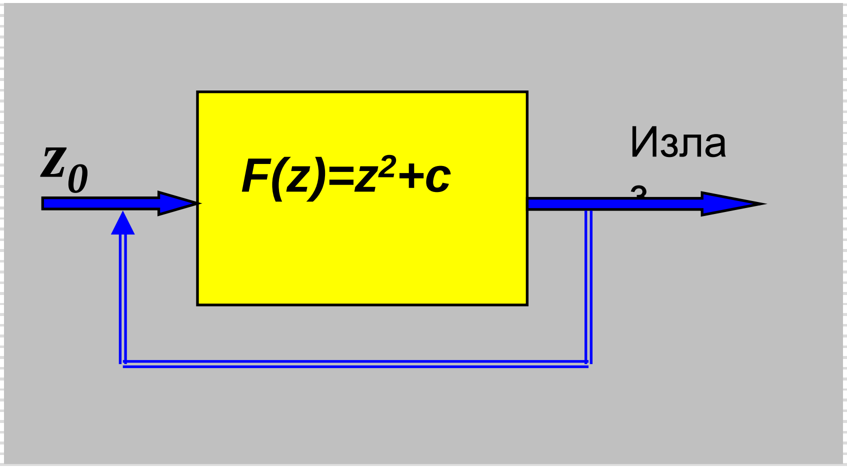


z_0 - почетна вредност

c – вредност параметра

$$z_1 = z_0^2 + c$$
$$z_2 = z_1^2 + c$$
$$z_3 = z_2^2 + c$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z_n = z_{n-1}^2 + c$$

Манделбротов скуп и скупови Џулија
комплексне итерације



z_0 - почетна вредност - улаз

c – вредност параметра

Излаз

$z_1 = z_0^2 + c$ прва итерација

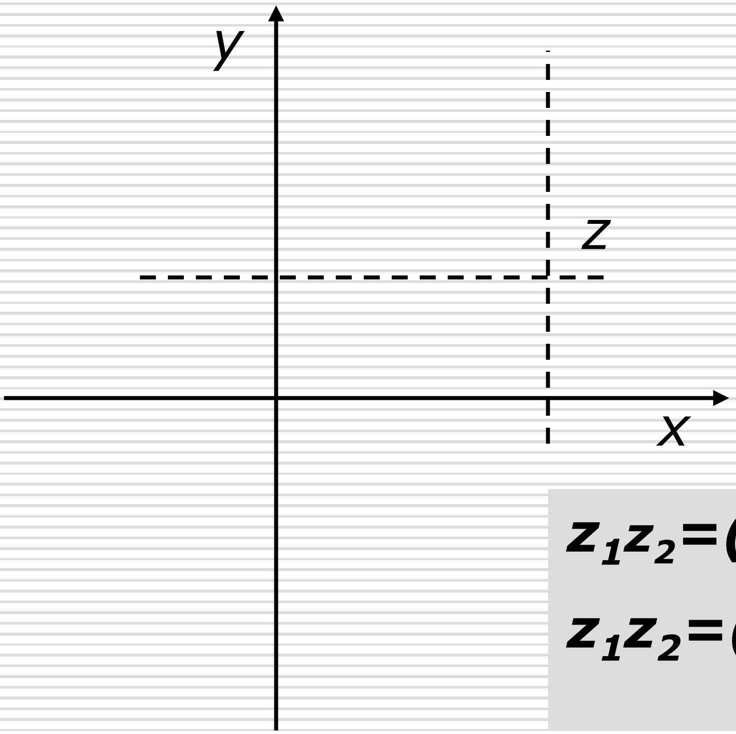
$z_2 = z_1^2 + c$ друга итерација

$z_3 = z_2^2 + c$ трећа итерација

....

$z_n = z_{n-1}^2 + c$ n-та итерација

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
Манделбротов скуп и скупови Џулија
аритметика комплексних бројева



$$z=(x,y) \qquad z=x+iy$$

$$z_1=x_1+iy_1$$

$$z_2=x_2+iy_2$$

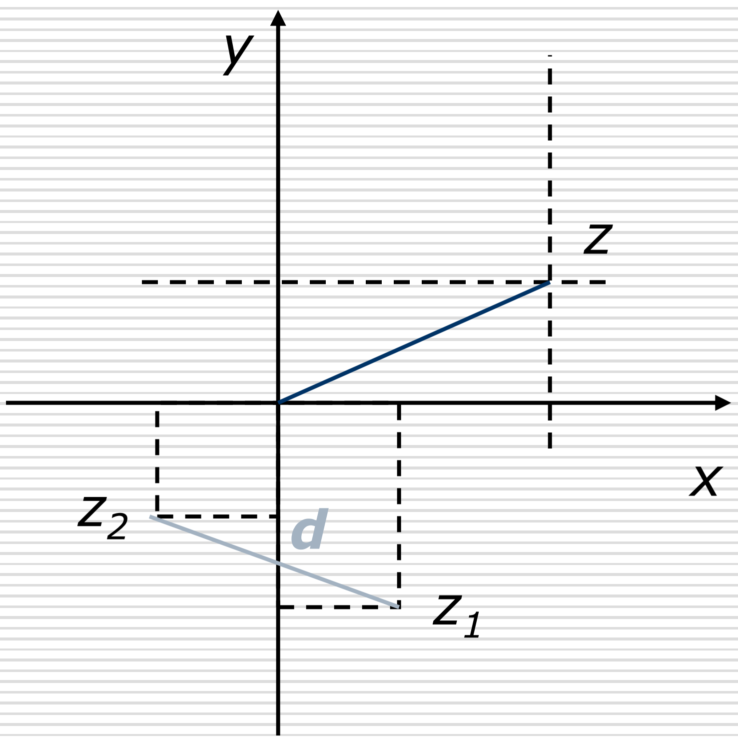
$$z_1+z_2=x_1+x_2+i(y_1+y_2)$$

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2) \qquad i^2=-1$$

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

$$z=x+iy \qquad z^2=(x^2-y^2)+i\,2xy$$

Манделбротов скуп и скупови Џулија
аритметика комплексних бројева



$$z=(x,y)$$

$$z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy$$

$$|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$$

$$d(z) = |z|$$ – Модуо комплексног броја (растојање од координатног почетка)

$$d = d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$ – Међусобно растојање тачака z_1 и z_2

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури

Манделбротов скуп и скупови Џулија
комплексне итерације

$z_n = x_n + iy_n$

$z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$

$c = a + ib$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$\boldsymbol{z_{n+1} = (x_n^2 - y_n^2 + a) + i\,(2x_n y_n + b)}$$

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a}$$

$$\boldsymbol{y_{n+1} = 2x_n y_n + b}$$

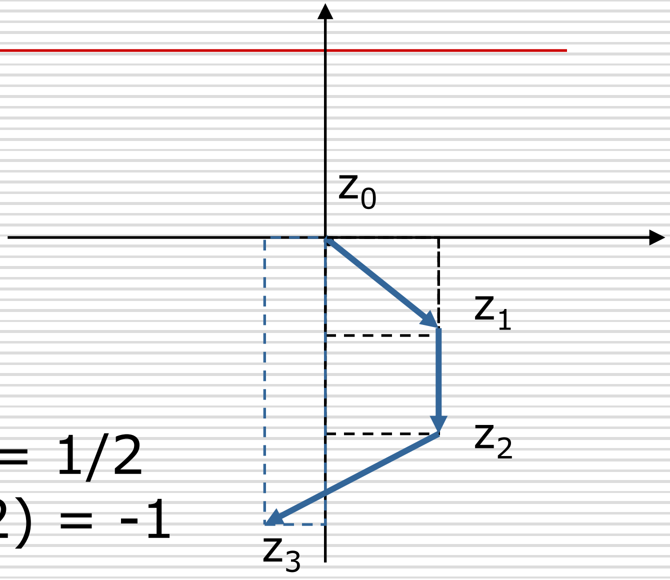
$$\boldsymbol{z = (x, y) \qquad z = x + iy}$$

Итеративни процес:

$$\boldsymbol{z \to z^2 + c: \quad \left| \begin{array}{l} x \to x^2 - y^2 + a \\ y \to 2xy + b \end{array} \right.}$$

Манделбротов скуп и скупови Џулија
комплексне итерације - пример

$c=(a, b) = (1/2, -1/2)$ $c= 1/2 -(1/2)i$
$z_0=(x_0, y_0) = (0, 0)$ $z_0=0$



$x_1 = x_0^2 - y_0^2 + a = 0^2 - 0^2 + 1/2 = 1/2$
$y_1 = 2*x_0*y_0 + b = 2*0*0 + (-1/2) = -1/2$

$x_2 = x_1^2 - y_1^2 + a = (1/2)^2 - (-1/2)^2 + 1/2 = 1/2$
$y_2 = 2*x_1*y_1 + b = 2*(1/2)*(-1/2) + (-1/2) = -1$

$x_3 = x_2^2 - y_2^2 + a = (1/2)^2 - (-1)^2 + 1/2 = -1/4$
$y_3 = 2*x_2*y_2 + b = 2*(1/2)*(-1) + (-1/2) = -3/2$

$z_1= 1/2 – (1/2)i$, $z_2= 1/2 – i$, $z_3= - 1/4 – (3/2)i$, …

$z_1= (1/2, – (1/2))$, $z_2=(½, –1)$, $z_3= (- 1/4, – (3/2))$, …

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури

Манделбротов скуп и скупови Џулија
поље Џулија скупа

Поље Џулија скупа Kc се дефинише за сваки комплексни број c.
За сваку тачку z_0 комплексне равни, генерише се низ z_1, z_2, z_3, ... помоћу итерационог правила $z_{n+1} = z_n^2 + c$.

Ако низ не одлази у бесконачност (ограничен је – не тежи бесконачности), z_0 припада Kc;
ако низ одлази у бесконачност (није ограничен - тежи бесконачности), z_0 не припада пољу Kc.

Критеријум: Ако је неки члан низа z_j, на одстојању већем од два, од координатног почетка $\left(|z_j| > 2\right)$ низ одлази у бесконачност и

z_0 не припада пољу Kc.

Манделбротов скуп и скупови Џулија
поље Џулија скупа

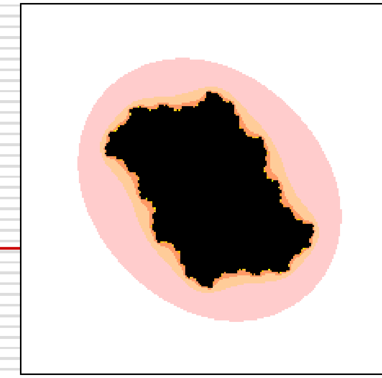
Критеријум: Ако је неки члан низа z_j, на одстојању већем

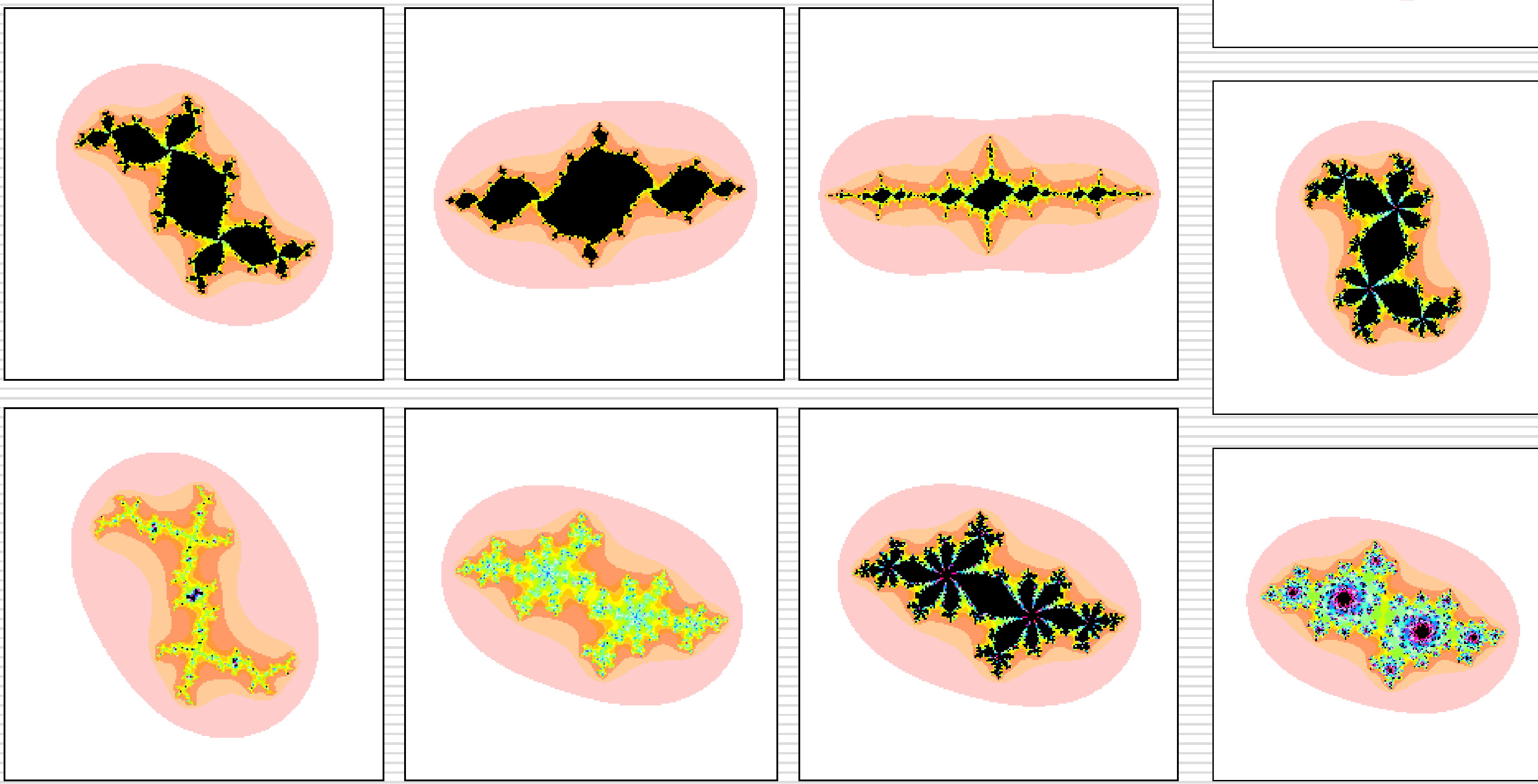
од два, од координатног почетка

z_0 не припада пољу Кс.

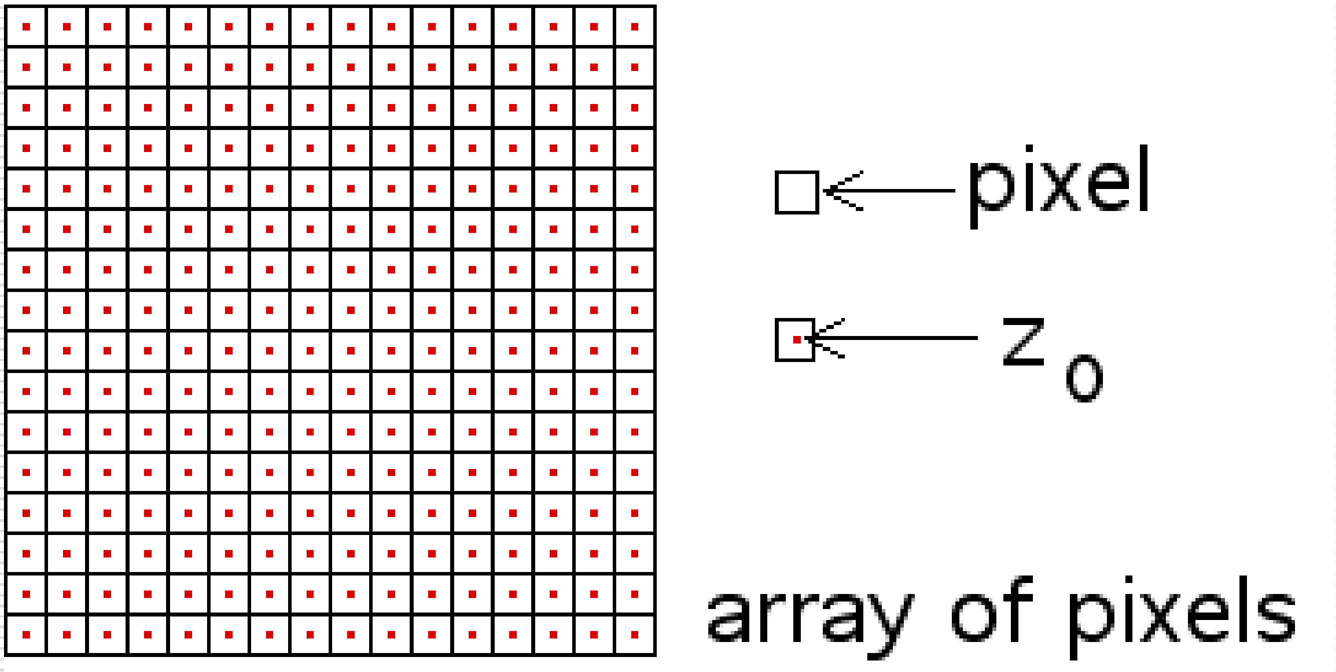
Број итерација потребан да се дође до члана низа на одстојању већем од два, од координатног почетка може бити велики. Да би се остварио у реалном времену, потребно је увести ограничење: максималан број итерација ***N***. Уколико после тог броја итерација растојање није веће од два, сматра се да z_0 припада пољу Кс.

Манделбротов скуп и скупови Џулија
примери поља Џулија скупова





Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури
Манделбротов скуп и скупови Џулија
коначна резолуција



$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Манделбротов скуп и скупови Џулија
поље Џулија скупа – колор шема

За свако z_0 (пиксел) комплексне равни формира се итеративни низ.

Пиксел z_0 се боји бело ако је $|z_1| > 2$.

Пиксел z_0 се боји црно ако припада пољу Кс односно ако ни после максималног броја од N итерација ни за један члан низа не важи $|z_j| > 2$.

У осталим случајевима, пиксел z_0 се боји различитим бојама или различитим нијансама исте боје зависно од броја извршених итерација

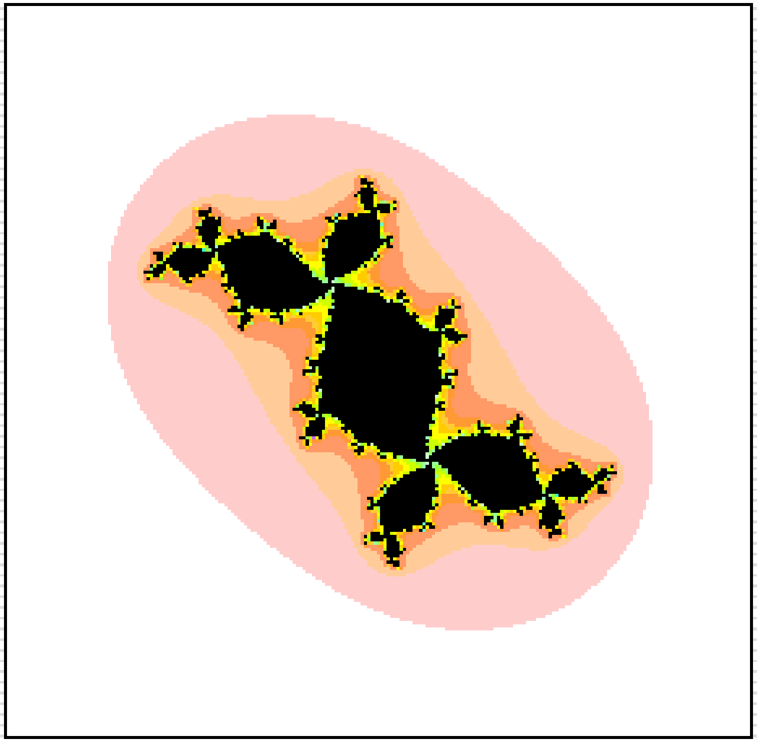
Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури

Манделбротов скуп и скупови Џулија
поље Џулија скупа – колор шема

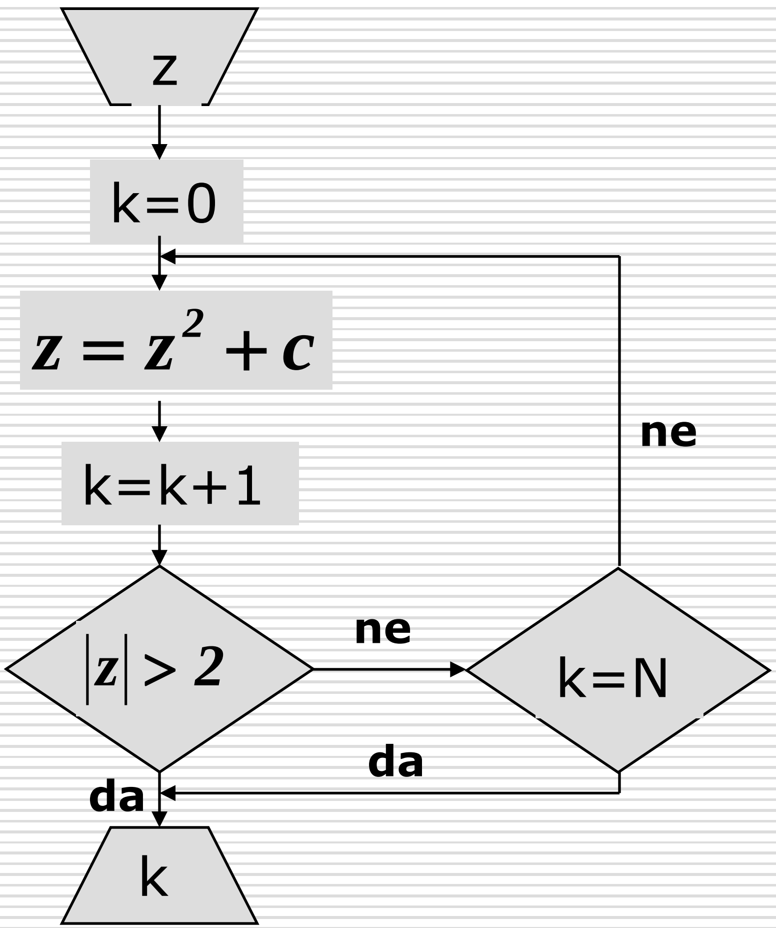
Пиксел z_0 се боји бело ако је z_1 на растојању већем од два од координатног почетка

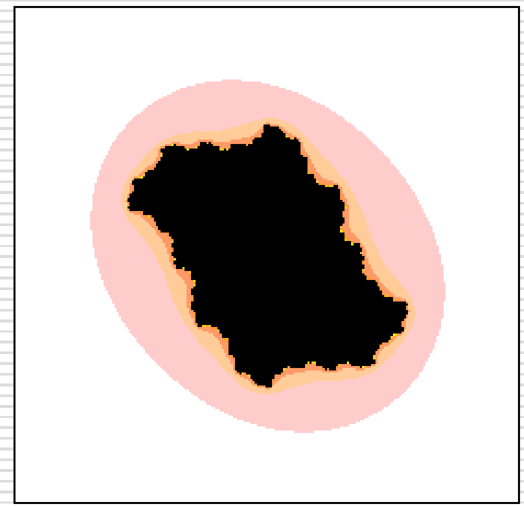
Пиксел z_0 се боји црно ако припада пољу Kc

Пиксел z_0 се боји у нијансама од светлог до тамног пинк са увећањем броја итерација.



Манделбротов скуп и скупови Џулија
поље Џулија скупа – колор шема





k=1 бело

k=N црно

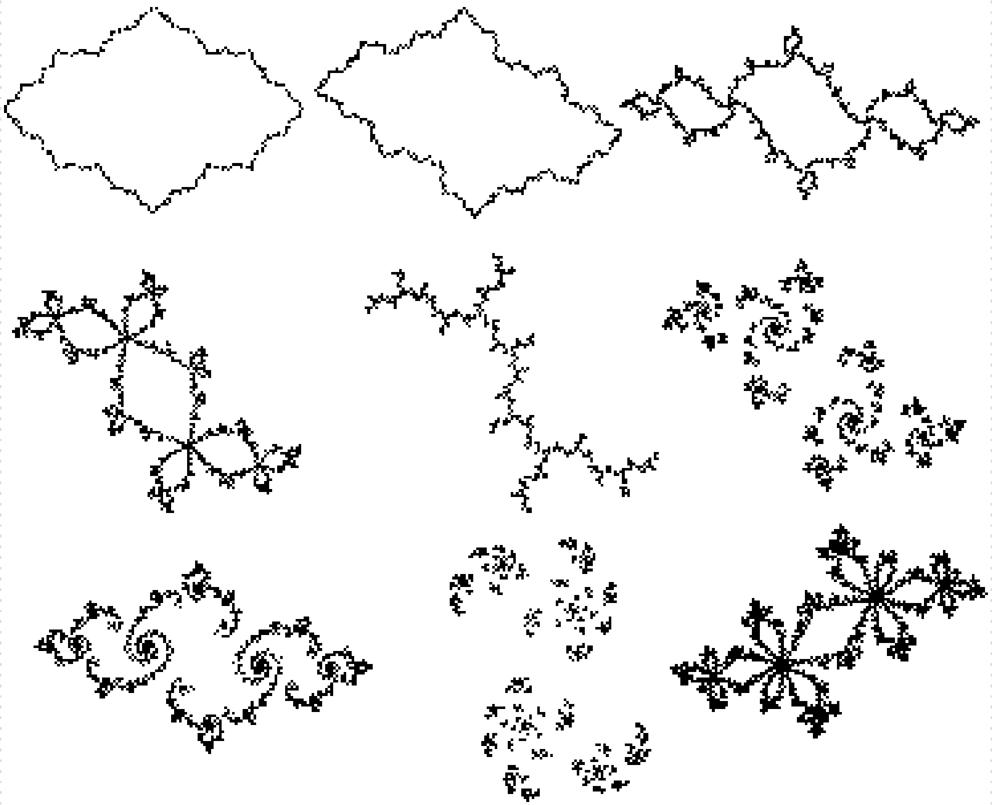
Остале вредности k су различити тонови пинк боје

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Манделбротов скуп и скупови Џулија
Џулија скупови

Џулија скуп Jc је граница поља Kc.

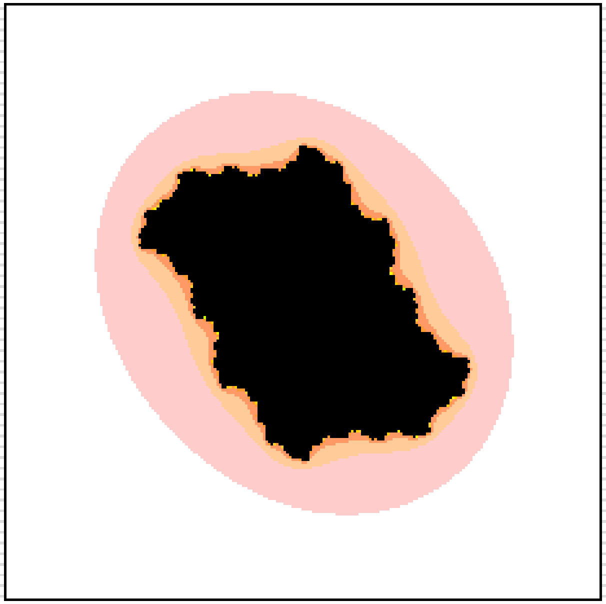
Исти итеративни процес за различите вредности параметра *c* генерише различите Џулија скупова.



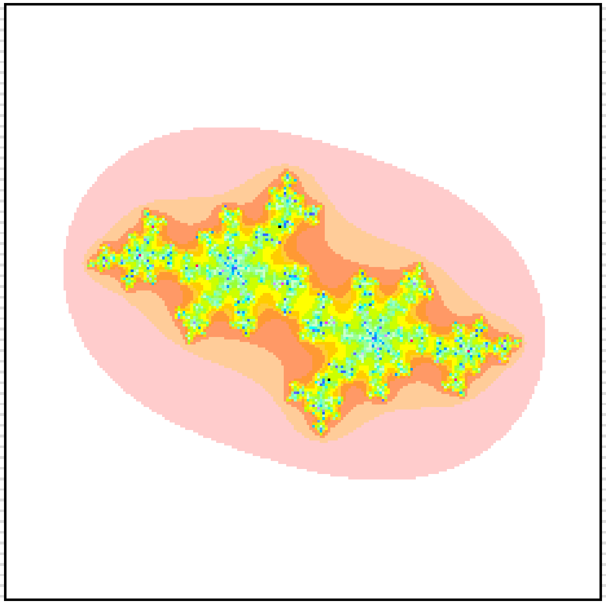
Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури

Манделбротов скуп и скупови Џулија

Џулија скупови - примери



Jc – затворена
крива линија



Jc=Kc – скуп неповезаних
тачака

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури

Манделбротов скуп и скупови Џулија

Манделбротов скуп

Манделбротов скуп настаје у истом итеративном процесу који се користи за Џулија скупове, али се примењује на други начин.

Џулија скупови настају у комплексној равни различитих вредности z_0 **(динамичка раван)** за различите вредности параметра c **(параметарска раван).**

Манделбротов скуп се формира у параметарској равни.

Манделбротов скуп и скупови Џулија

Манделбротов скуп

За Манделбротов скуп М почетна вредност је $z_0=0$ и формира се у параметарској равни истом логиком као и Џулија скупови.

За сваку тачку c комплексне параметарске равни, генерише се низ $z_1, z_2, z_3, \ldots$ помоћу итерационог правила $z_{n+1} = z_n^2 + c$.

Ако низ не одлази у бесконачност c припада скупу М;
ако низ одлази у бесконачност, c не припада М.

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури

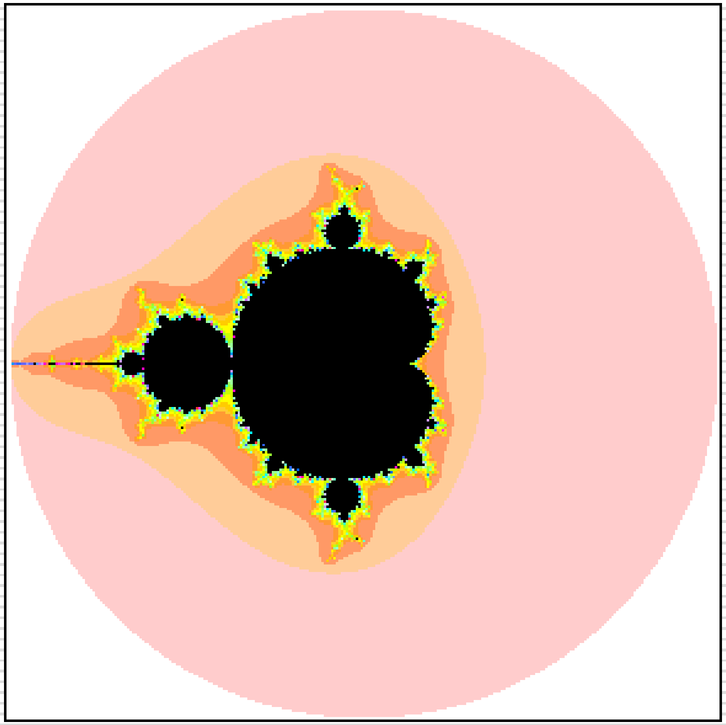
Манделбротов скуп и скупови Џулија

Манделбротов скуп

Критеријуми за припадност скупу и боје пиксела је исти као и за поље Џулија скупова.

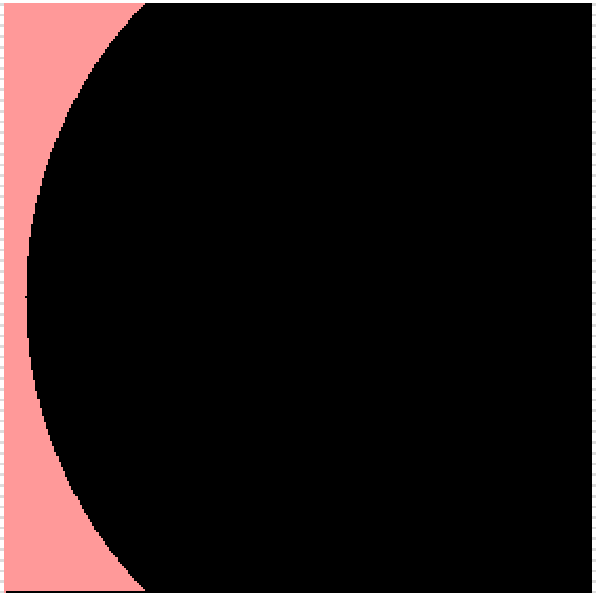
Како је у првој итерацији z_1=c, граница беле боје односно граница бојеног дела и беле боје је круг

$$|c| = 2$$

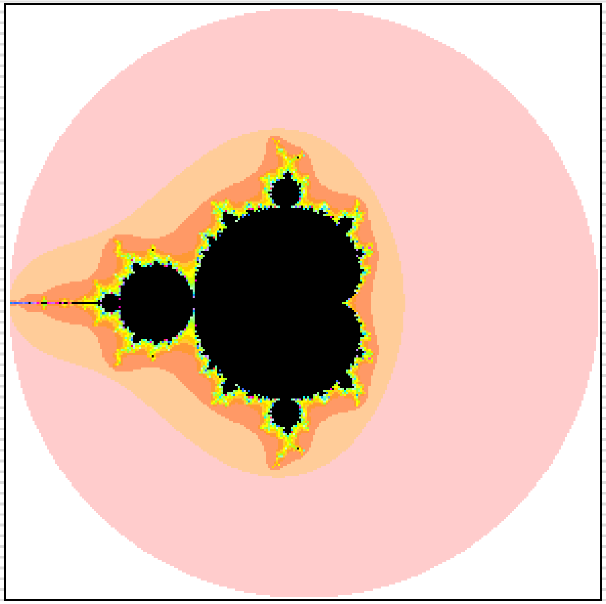


Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури

Манделбротов скуп и скупови Џулија ефекат максималног броја итерација



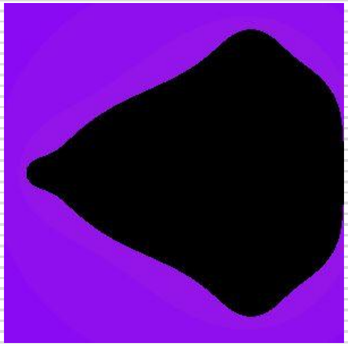
N=1



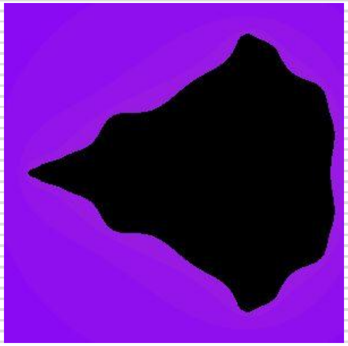
N=25

Фрактална геометрија
и фрактали у архитектури

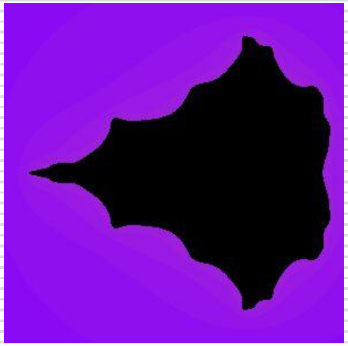
Манделбротов скуп и скупови Џулија
ефекат максималног броја итерација



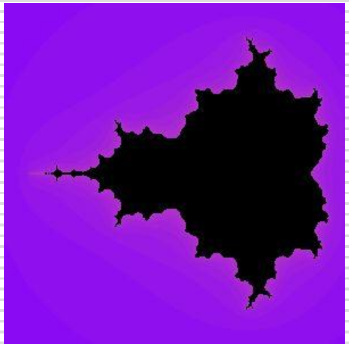
N=4



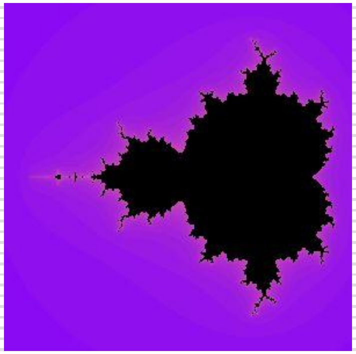
N=5



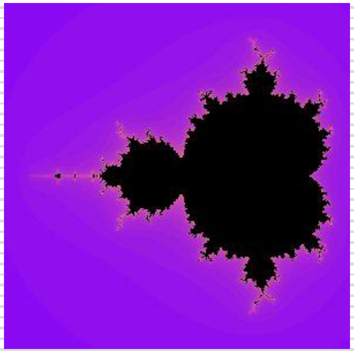
N=6



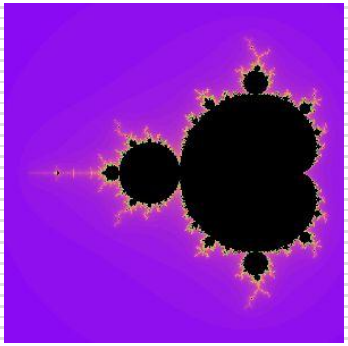
N=10



N=15



N=20



N=150

Манделбротов скуп и скупови Џулија

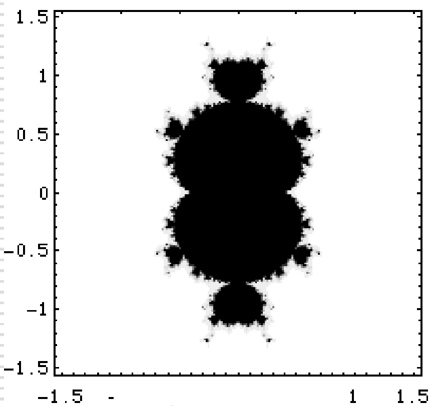
Манделбротов скуп - уопштење

За свако $n > 2$ дефинише се Манделбротов скуп за функцију $f(z) = z^n + c$. Алгоритам генерисања Манделбротовог скупа је исти као и за функцију $z^2 + c$. Стартује се са $z_0=0$ и врши генерисање слике помоћу итеративне формуле $z_n = f(z_{n-1})$.

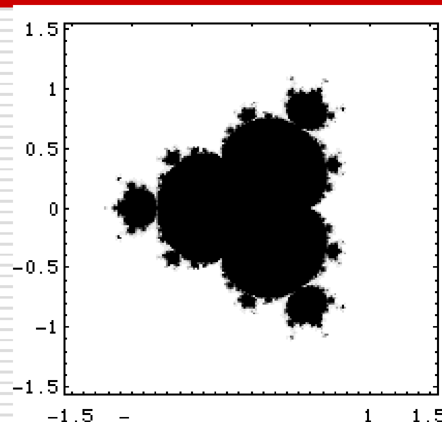
За функције са више критичних вредности проблем је сложенији.

Манделбротов скуп и скупови Џулија

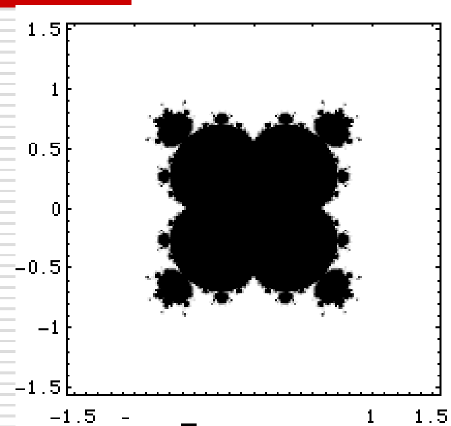
Манделбротов скуп - уопштење



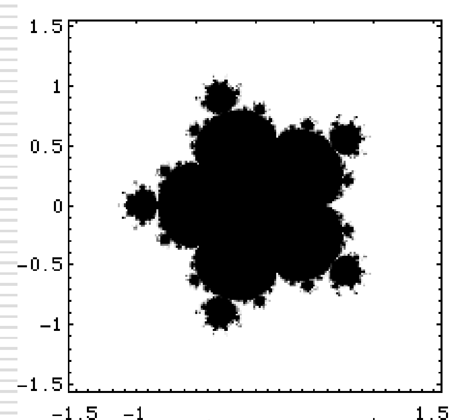
$z^3 + c$



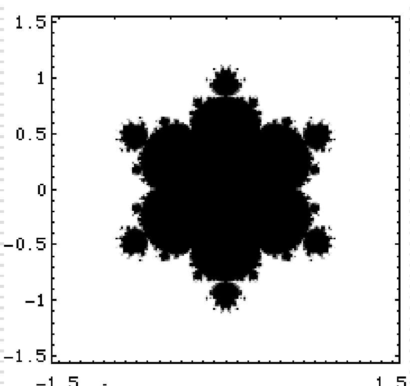
$z^4 + c$



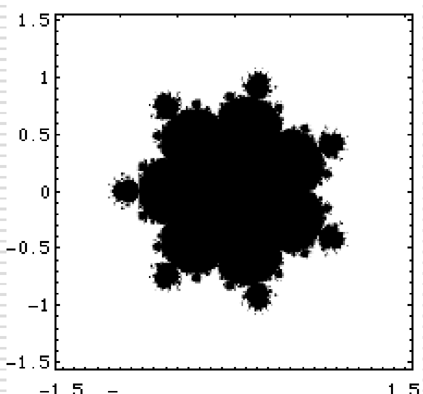
$z^5 + c$



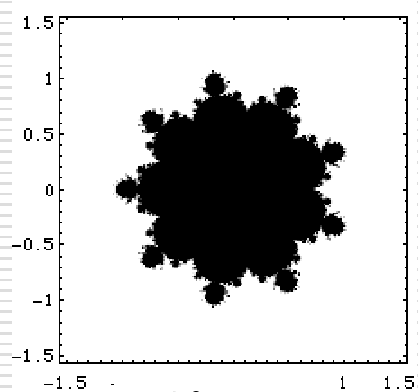
$z^6 + c$



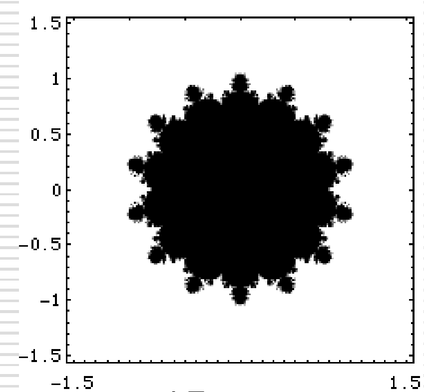
$z^7 + c$



$z^8 + c$



$z^{10} + c$



$z^{15} + c$