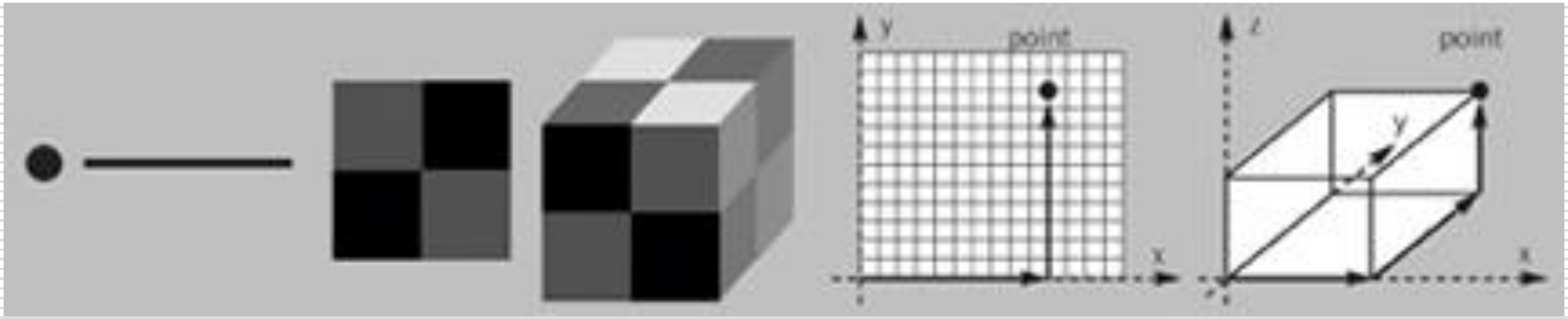
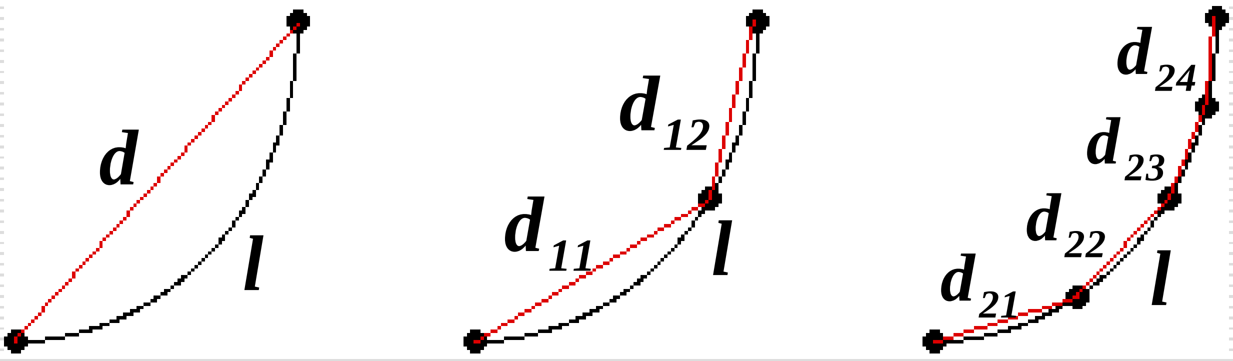
Фрактална геометрија и фрактали у архитектури
димензија фрактала-увод –Еуклидска димензија

Тачка нема дужину, ширину; њена димензија је 0. Еуклидска димензија праве линије је 1, равне фигуре 2; Еуклидска димензија тела у простору је 3. Димензија се доводи у везу са координатним системом у коме се може приказати Еуклидски елемент.



Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

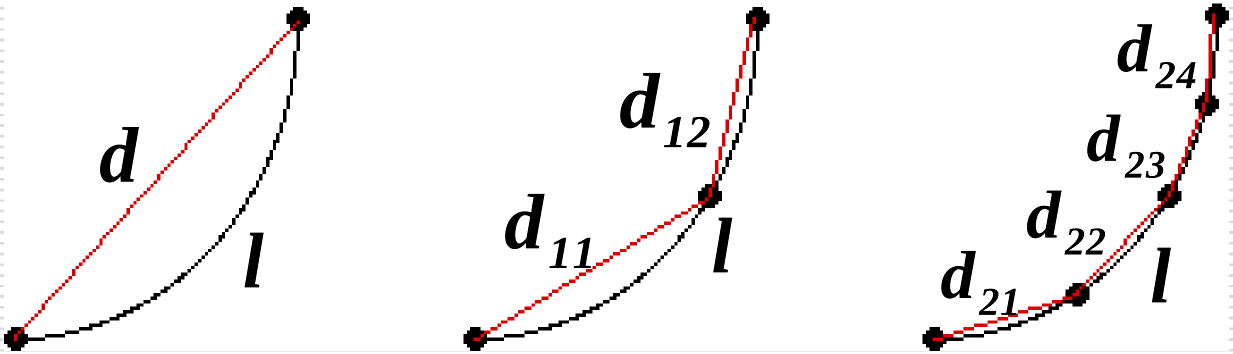
димензија фрактала-увод- дужина криве линије



Најкраће растојање између две тачке је дуж.

$$l \geq d \qquad l \geq d_{11} + d_{12} \qquad l \geq d_{21} + d_{22} + d_{23} + d_{24}$$

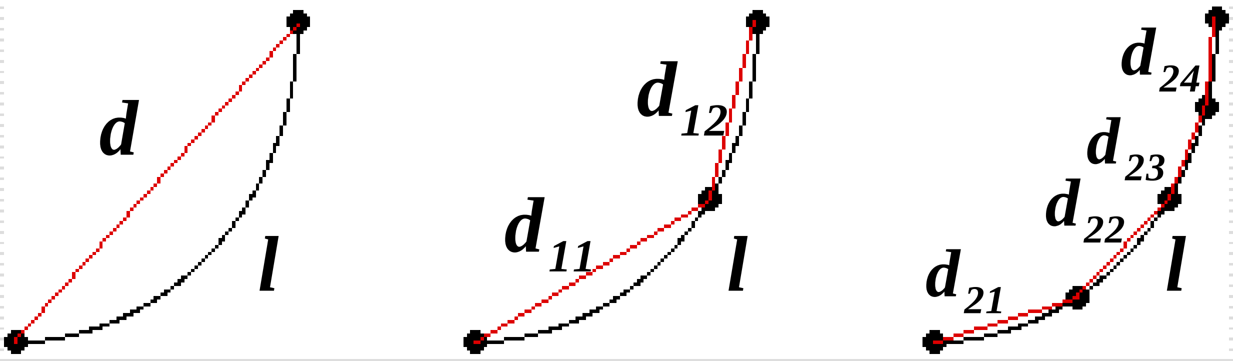
Фрактална геометрија и фрактали у архитектури
димензија фрактала-увод- дужина криве линије



$$d \le d_{11} + d_{12} \le d_{21} + d_{22} + d_{23} + d_{24} + \ldots \le l$$

У граничном процесу, кад број деоних тачака тежи бесконачности, дужине дужи теже нули, а збир њихових дужина тежи дужини криве линије.

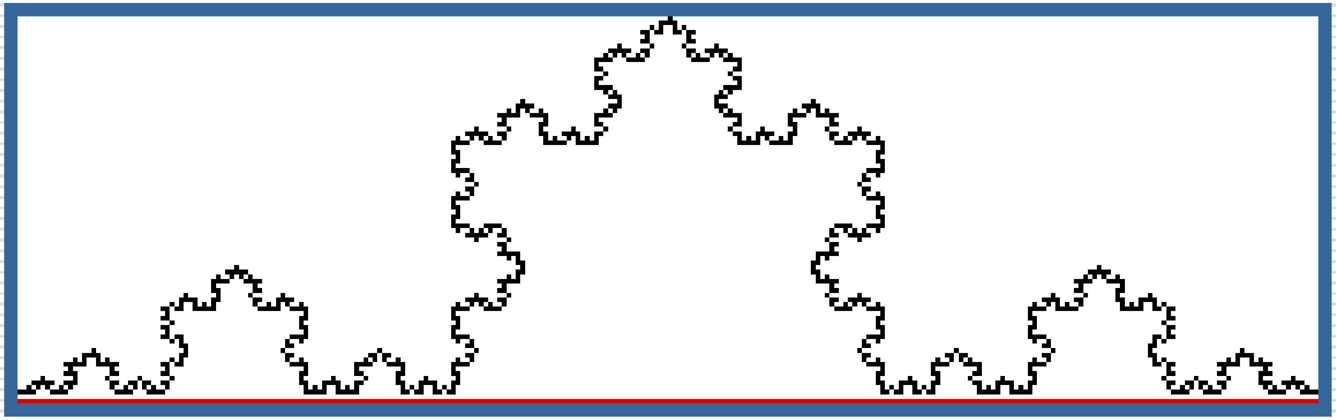
Фрактална геометрија и фрактали у архитектури
димензија фрактала-увод- дужина криве линије



За довољно велики број деоних тачака, крива линија је довољно добро апроксимирана изломљеном кривом линијом. Дужина те изломљене криве линије представља довољно добру апроксимацију дужине криве.

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури
димензија фрактала-увод- дужина Кохове криве

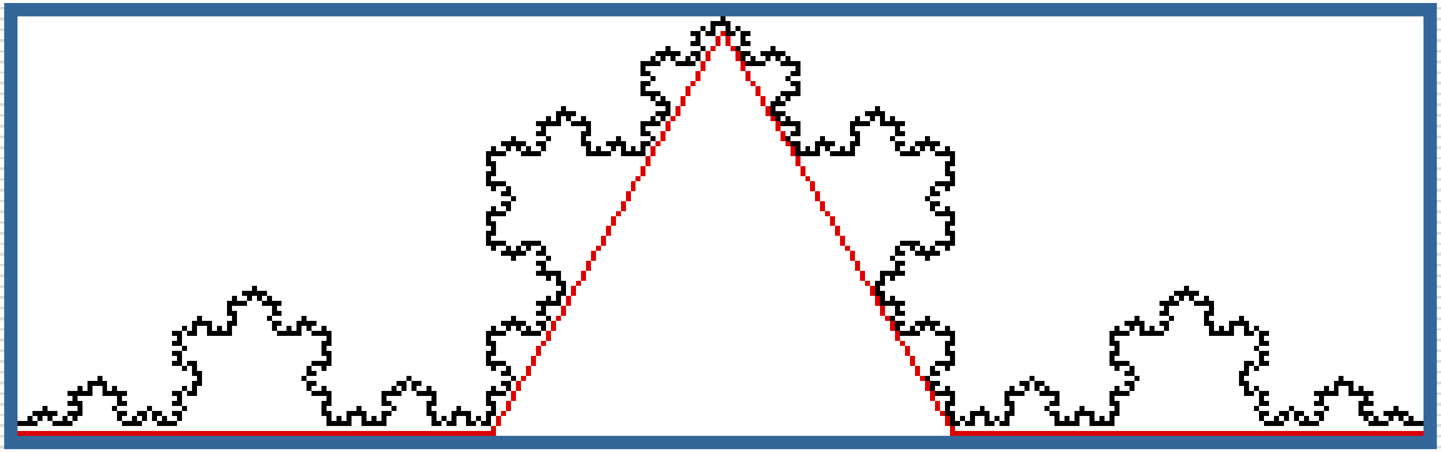
Најкраће растојање између две тачке је дуж.



Прва апроксимација дужине Кохове криве је дужина дужи одређене почетном и завршном тачком:
(на пример $L_0 = 1m$).

Дужина Кохове криве је већа од $L_0 = 1m$

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури
димензија фрактала-увод- дужина Кохове криве



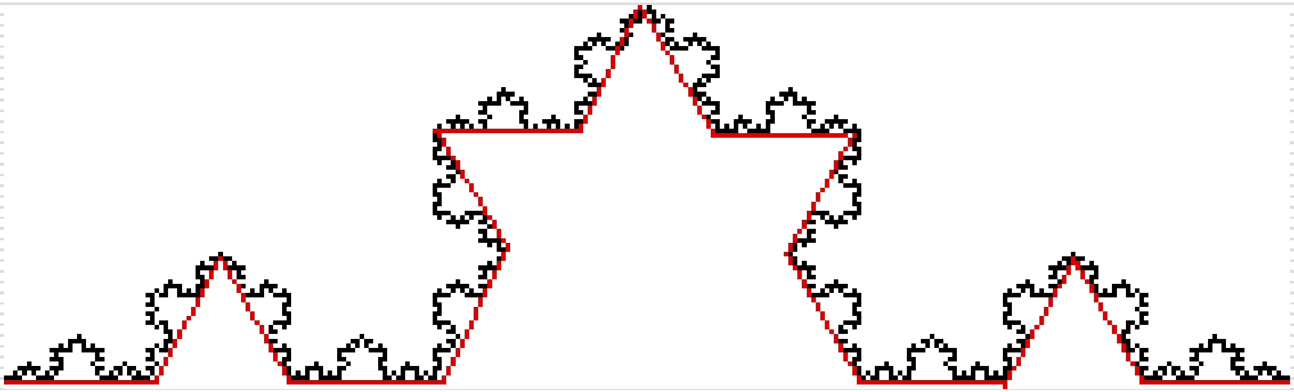
Додајући три тачке између крајњих тачака Кохове криве добија се изломљена крива линија која се састоји од 4 дужи дужине 1/3.

Друга апроксимација: $L_1 = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

Дужина Кохове криве је већа од $L_1 = \frac{4}{3}$

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

димензија фрактала-увод- дужина Кохове криве



Додајући три нове тачке између сваког пара тачака, добија се изломљена крива линија која се састоји од 16 дужи дужине 1/9.

Трећа апроксимација: $$L_2 = 16 \cdot \frac{1}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Дужина Кохове криве је већа од $$L_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

димензија фрактала-увод- дужина Кохове криве

Настављајући процес добија се:

n	Дужина сегмента	Број сегмената	L_n
0	1	1	$L_0 = 1$
1	1/3	4	$L_1 = 4/3$
2	$1/9 = 1/3^2$	$16 = 4^2$	$L_2 = 16/9 = (4/3)^2$
3	$1/27 = 1/3^3$	$64 = 4^3$	$L_3 = 64/27 = (4/3)^3$
...	...	...	...
n	$1/3^n$	4^n	$L_n = (4/3)^n$

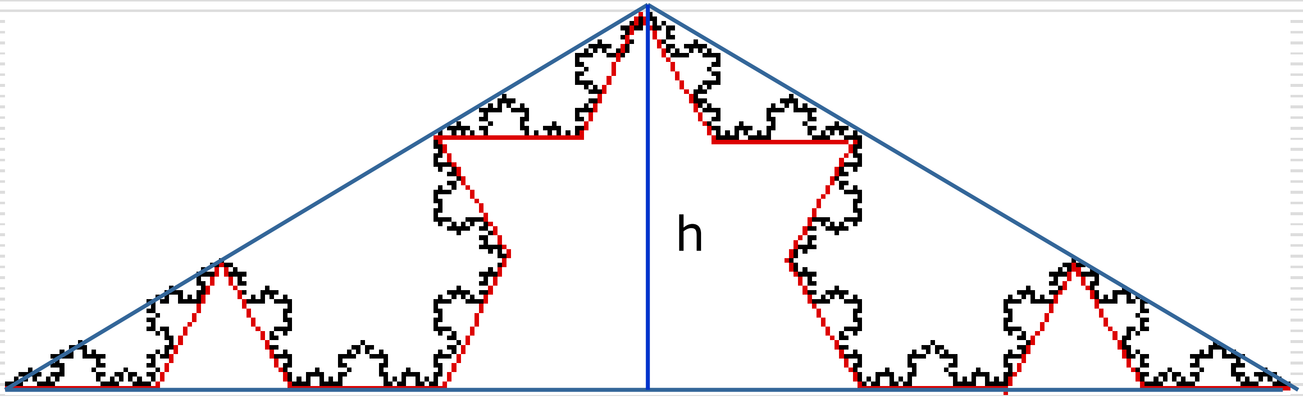
$$L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty, \ kad\ n \to \infty$$

$$\boldsymbol{L \geq L_n \to \infty}$$

Кохова крива је бесконачне дужине.

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

димензија фрактала-увод- површина Кохове криве

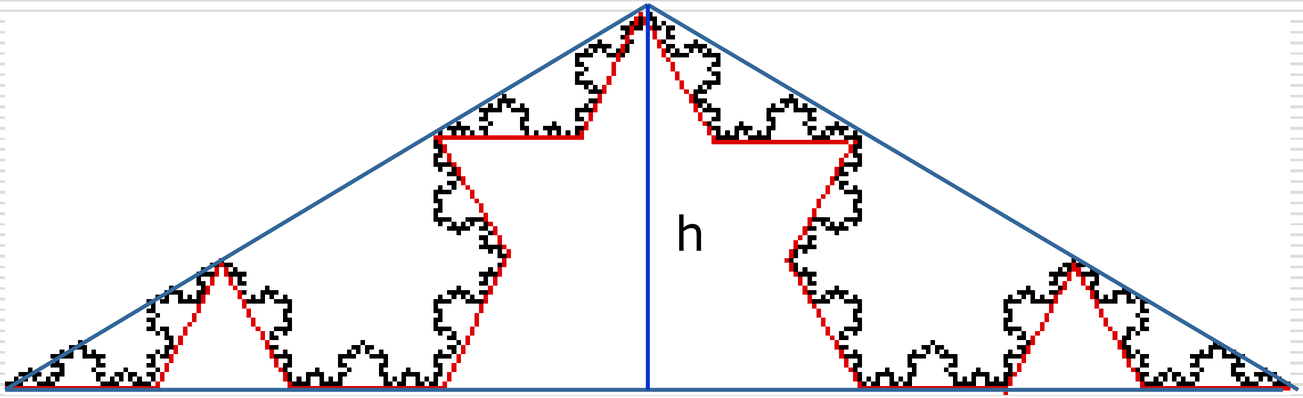


$$h=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$P_0=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

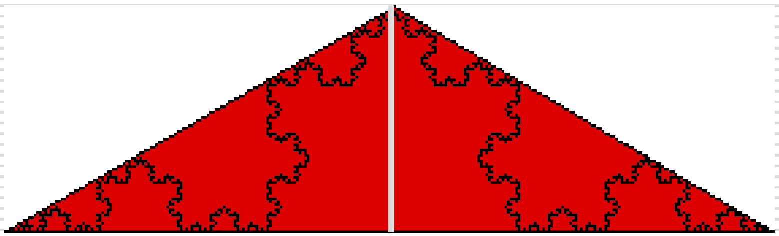
димензија фрактала-увод- површина Кохове криве



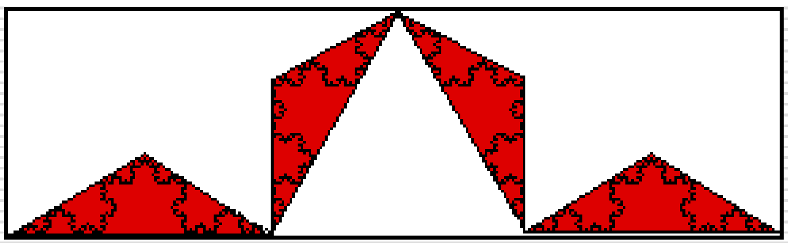
$$h=\frac{\frac{a}{3}\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$P_0=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$$

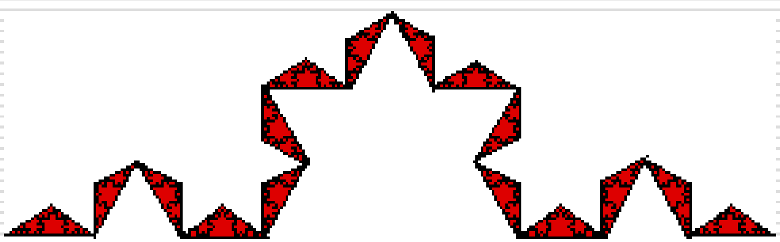
Фрактална геометрија и фрактали у архитектури
димензија фрактала-увод- површина Кохове криве



$$P \le P_0 = \frac{\sqrt{3}}{12}$$



$$P \le P_1 = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{4}{9}$$



$$P \le P_2 = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

димензија фрактала-увод- површина Кохове криве

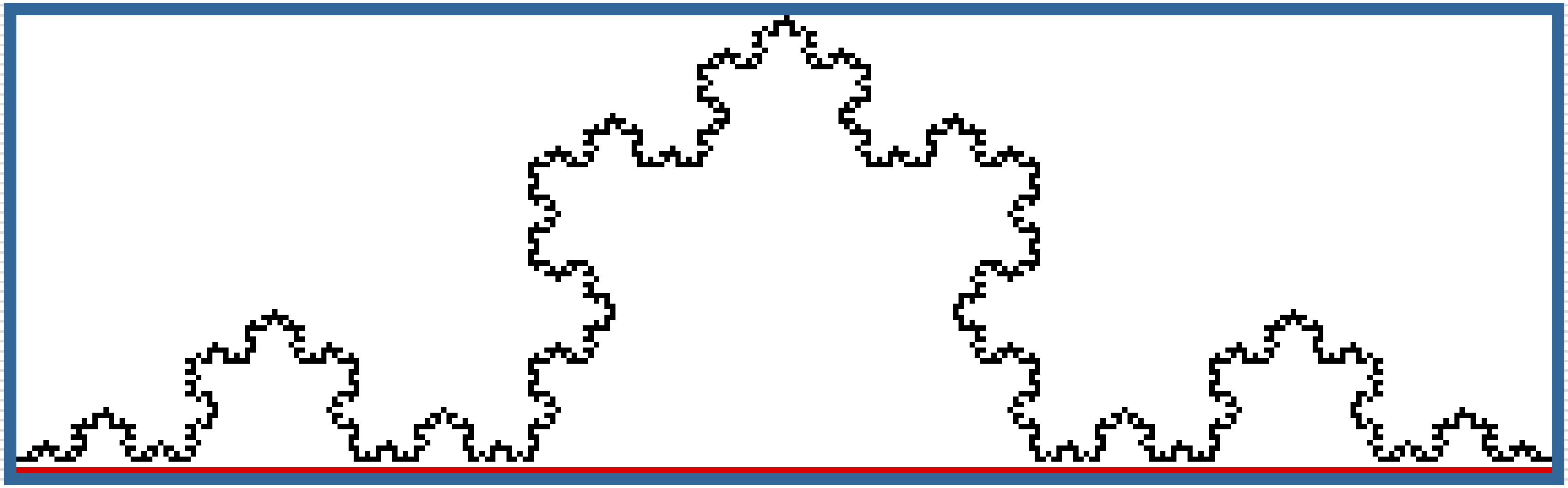
Настављајући поступак добија се:

$$P \le P_n = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$P \le P_n \to 0, \; n \to \infty \;\; \Rightarrow \;\; P = 0$$

Кохова крива бесконачне дужине заузима површину нула.

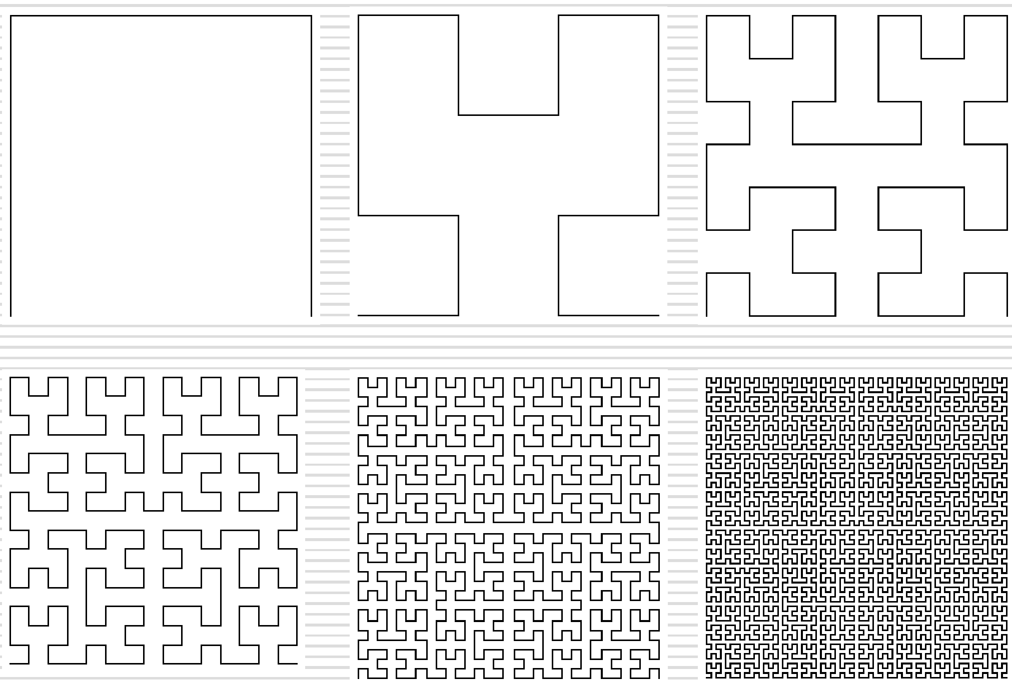
Фрактална геометрија и фрактали у архитектури
димензија фрактала-увод- Кохова крива



Крива бесконачне дужине смештена у ограничен део равни.

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури
димензија фрактала-увод–Хилбртова крива

Подесним савијањем праве линије димензије 1 (Хилбертова крива) попуњава се квадрат димензије 2!



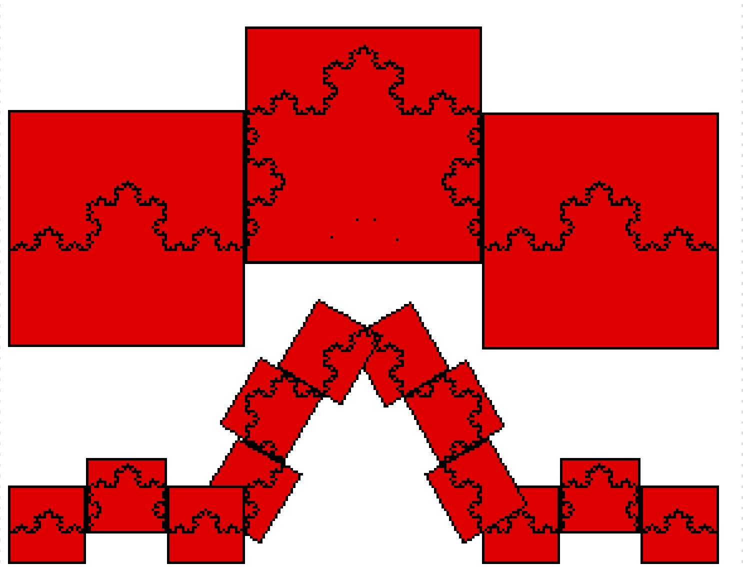
димензија фрактала-увод

Уочени парадокси производе идеју увођења појма димензије фрактала.

Однос дужине и површине коју заузима Кохова крива производе идеју увођење појма димензије фрактала помоћу покривања боксовима (кутијама) и утврђивања броја тих боксова.

Боксови су квадрати (или правоуаоници) у равни, коцке (или квадри) у простору.

димензија фрактала – покривање криве линије квадратима



Покривање квадратима странице r

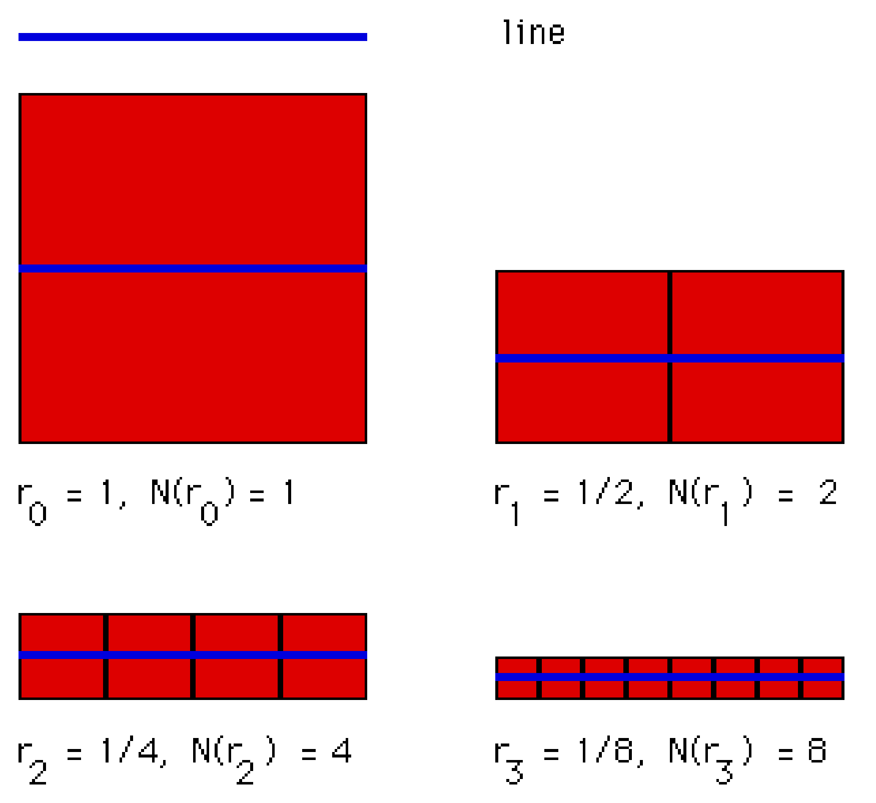
$N(r)$ – број квадрата

$N(r)\cdot r$ апроксимација дужине

$N(r)\cdot r^2$ апроксимација површине

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

димензија фрактала – покривање криве линије квадратима



Линија дужине 1

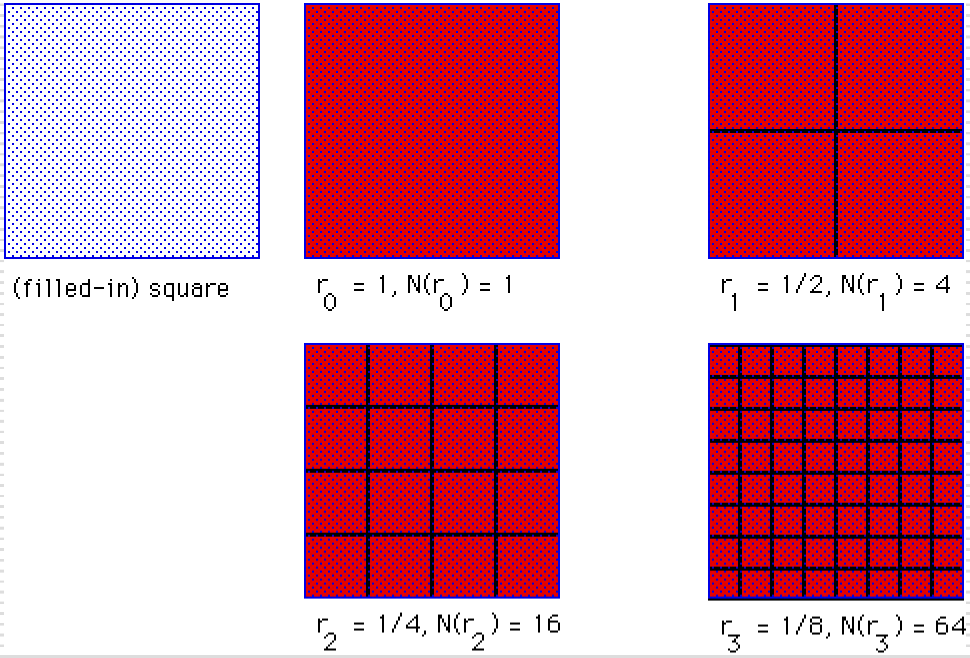
Покривање квадратима странице r

$N(r)$ – број квадрата

$$N(r) = \frac{1}{r}$$

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

димензија фрактала- покривање квадратне површи



Квадрат странице 1

Покривање квадратима странице r

$N(r)$ – број квадрата

$$N(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^2$$

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури
димензија фрактала- покривање коцке

Коцка ивице 1

Покривање коцкама странице r

$N(r)$ – број коцки

$$N(r)=\left(\frac{1}{r}\right)^{3}$$

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури
димензија фрактала – d_b-димензија

Покривање квадратима странице r

$N(r)$ – број квадрата

У општем облику за сложене геометријске фигуре – линије – тела апроксимативно

$$N(r) = k \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^{d}$$

димензија фрактала – d_b-димензија

$$N(r) = k \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^{d}$$

$$d = d(r)$$

$$\log N(r) = \log k + d \log\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{\log N(r)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\log k}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} + d$$

$$d_b = \lim_{r \to 0} \frac{\log N(r)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

димензија фрактала – d_b-димензија

За довољно мало r

$$d_b = lim_{r \to 0} \frac{log\, N(r)}{log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

$$d_b \approx \frac{log\, N(r)}{log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

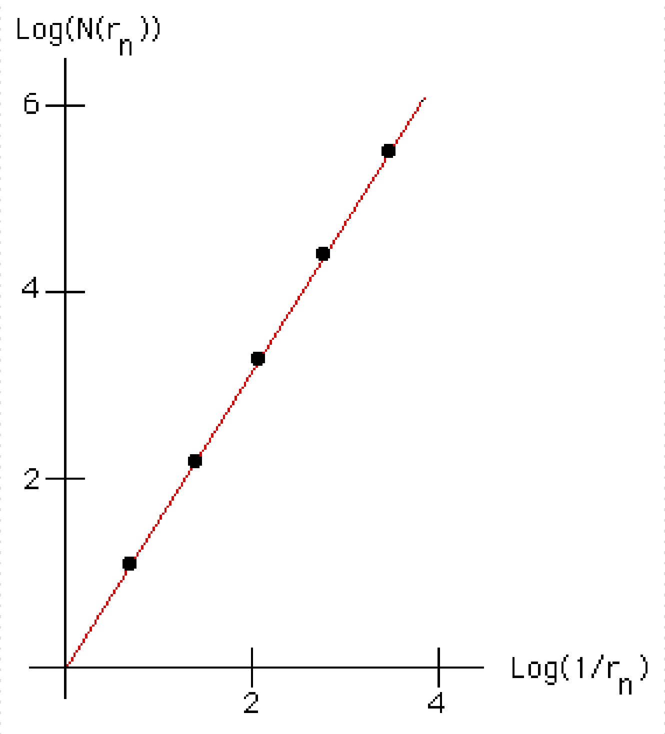
Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

димензија фрактала – d_b-димензија

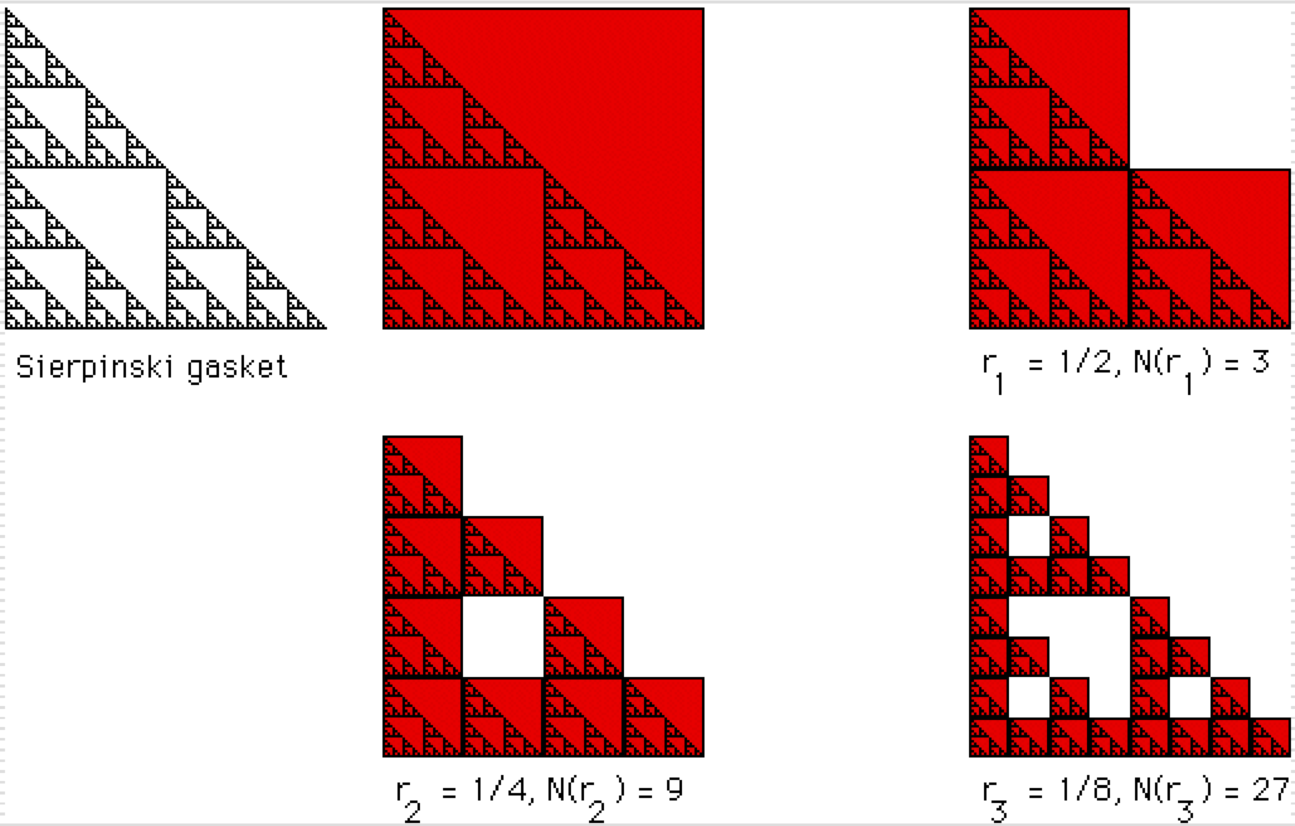
$$\frac{\log N(r)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\log k}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} + d$$

$$\log N(r) = \log k + d \log\left(\frac{1}{r}\right)$$

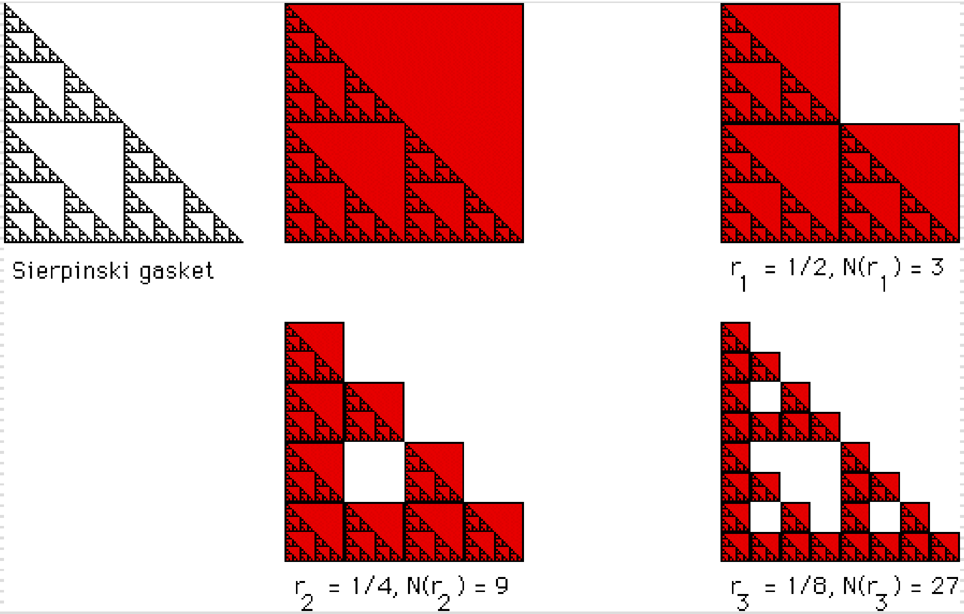
d-коефицијент правца



димензија фрактала – d_b-димензија-троугао Сиерпинског



Фрактална геометрија и фрактали у архитектури димензија фрактала – d_b-димензија- троугао Сиерпинског



r	N(r)
1	1
1/2	3
$(1/2)^2=1/4$	3^2
$(1/2)^3 = 1/8$	3^3
....	
$(1/2)^n$	3^n

$$N((1/2)^n) = 3^n$$

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури
димензија фрактала – d_b-димензија-троугао Сиерпинског

$N((1/2)^n) = 3^n$ $\qquad r = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \frac{1}{r} = 2^n \qquad N(r) = 3^n$

$$d_b = \lim_{r \to 0} \frac{\log N(r)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

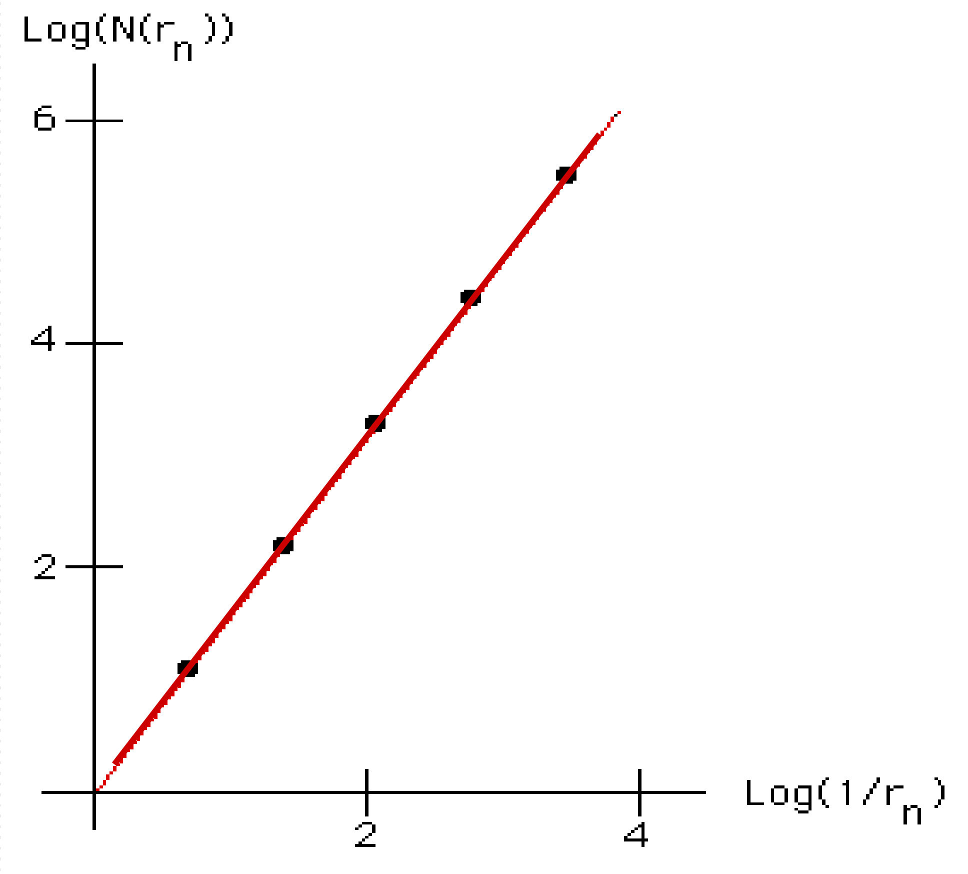
$$d_b = \lim_{n \to \infty} \frac{\log 3^n}{\log 2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n \log 3}{n \log 2} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.58996$$

димензија фрактала – d_b-димензија-троугао Сиерпинског

	r	1/r	N(r)	Log(1/r)	Log(N(r))
	1	1	1	0	0
	1/2	2	3	0.301	0.477
$(1/2)^2$	1/4	4	$3^2=9$	0.602	0.954
$(1/2)^3$	1/8	8	$3^3=27$	0.903	1.432
$(1/2)^4$	1/16	16	$3^4=81$	1.204	1.908
				x	y

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

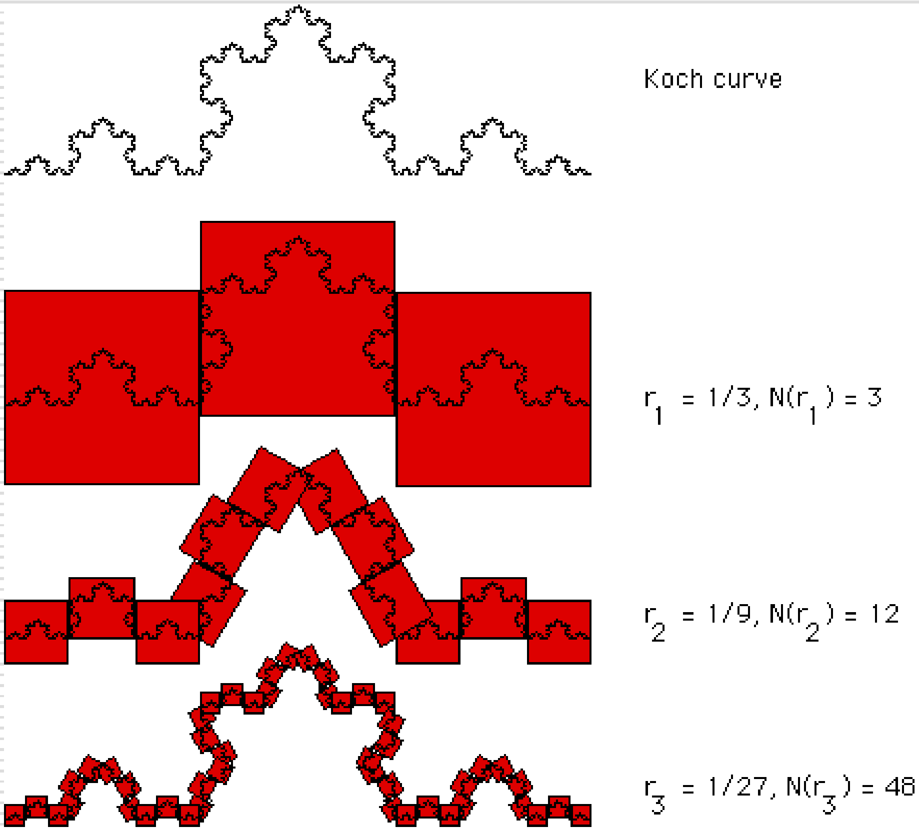
димензија фрактала – d_b-димензија-троугао Сиерпинског



$$d_b = 1.59$$

Фрактална геометрија и фрактали у архитектури

димензија фрактала – d_b-димензија-Кохова крива



r	N(r)
1	1
1/3	3
$(1/3)^2=1/9$	3*4
$(1/3)^3 = 1/27$	$3*4^2$
....	
$(1/3)^n$	$3*4^{n-1}$

димензија фрактала – d_b-димензија- Кохова крива

$$d_b = lim_{r\to 0} \frac{log\, N(r)}{log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

$$N((1/3)^n) = 3*4^{n-1}$$

$$d_b = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 3\cdot 4^{n-1}}{\log 3^n}$$

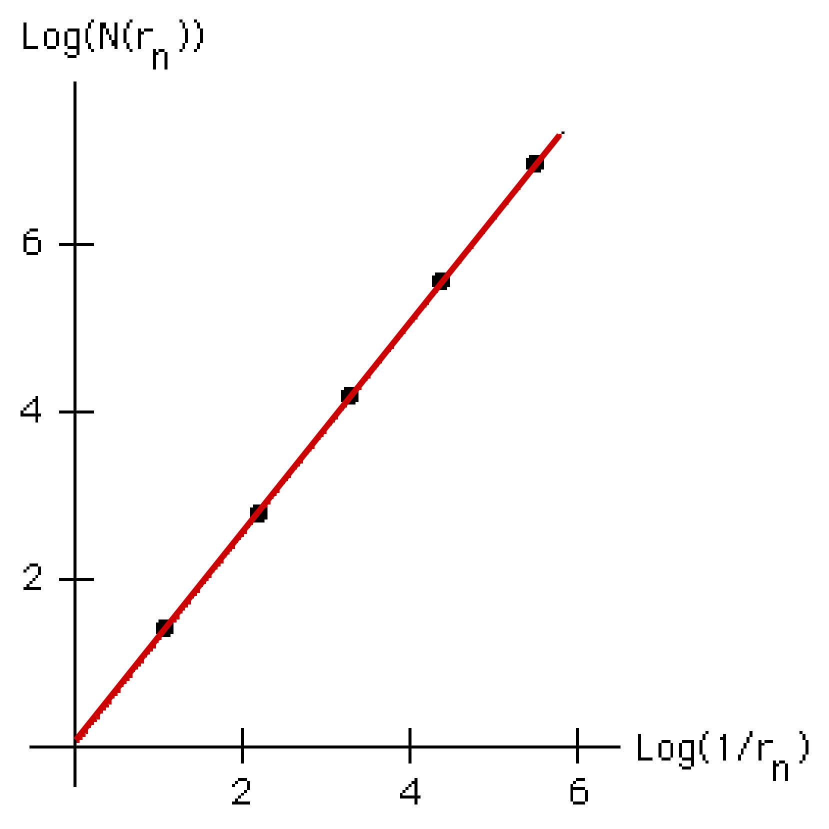
$$d_b = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 3 + (n-1)\log 4}{n\log 3}$$

$$d_b = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\frac{\log 4}{\log 3}\right) = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26$$

димензија фрактала – d_b-димензија- Кохова крива

	r	1/r	N(r)	Log(1/r)	Log(N(r))
	1	1	1	0	0
	1/3	3	3	0.477	0.477
$(1/3)^2 \rightarrow$	1/9	9	3*4=12	0.954	1.079
$(1/3)^3 \rightarrow$	1/27	27	$3*4^2=48$	1.431	1.681
$(1/3)^4 \rightarrow$	1/81	81	$3*4^3=192$	1.908	2.283

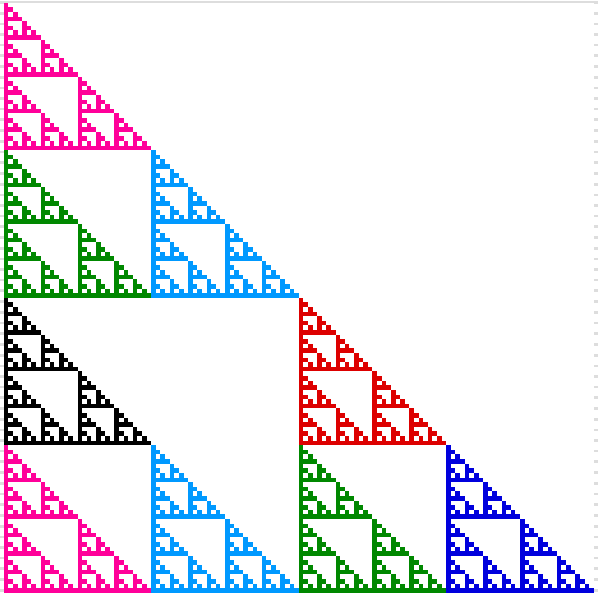
димензија фрактала – d_b-димензија-Кохова крива



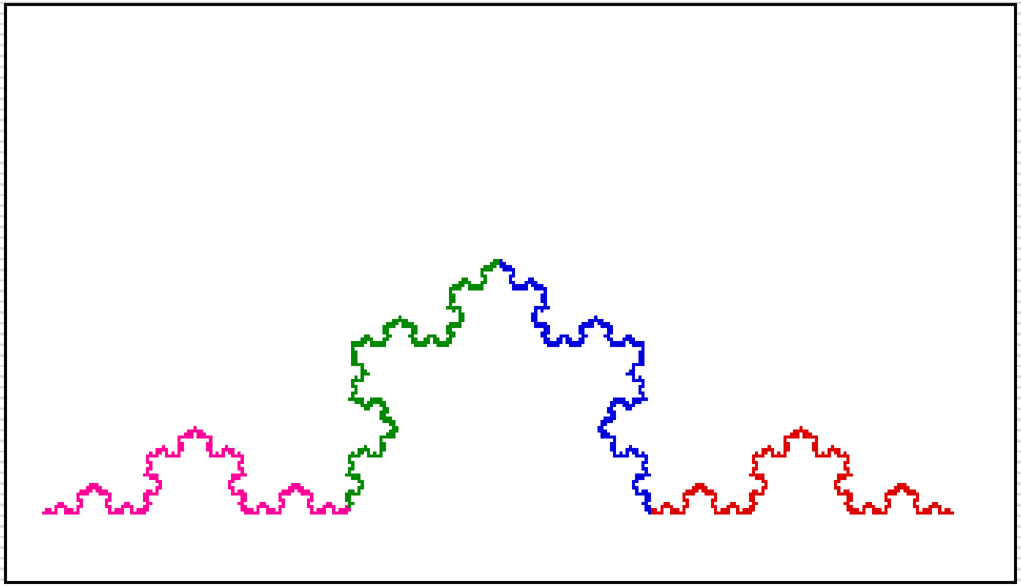
$$d_b = 1.26$$

димензија фрактала –
d_b-димензија- троугао Сиерпинског и Кохова крива

поређење добијених резултата



$$d_b = 1.59$$



$$\boldsymbol{d_b = 1.26}$$