

Фрактална геометрија

L -системи

У једноставној верзији L -систем се састоји од

- једног алфабета (азбуке) A која представља скуп неких симбола
- једног аксиома S који представља стринг (низ) симбола (слова) дате азбуке и
- скупа P продукционих правила која сваком симболу a дате азбуке додељују неки стринг $P(a)$ симбола те азбуке.

Стринг $P(a)$ се назива наследником или следбеником симбола a . Симбол a се назива претходником стринга $P(a)$.

Фрактална геометрија

L -системи

азбука

$$A = \{a, b, c, \dots\}$$

аксиом

стринг S

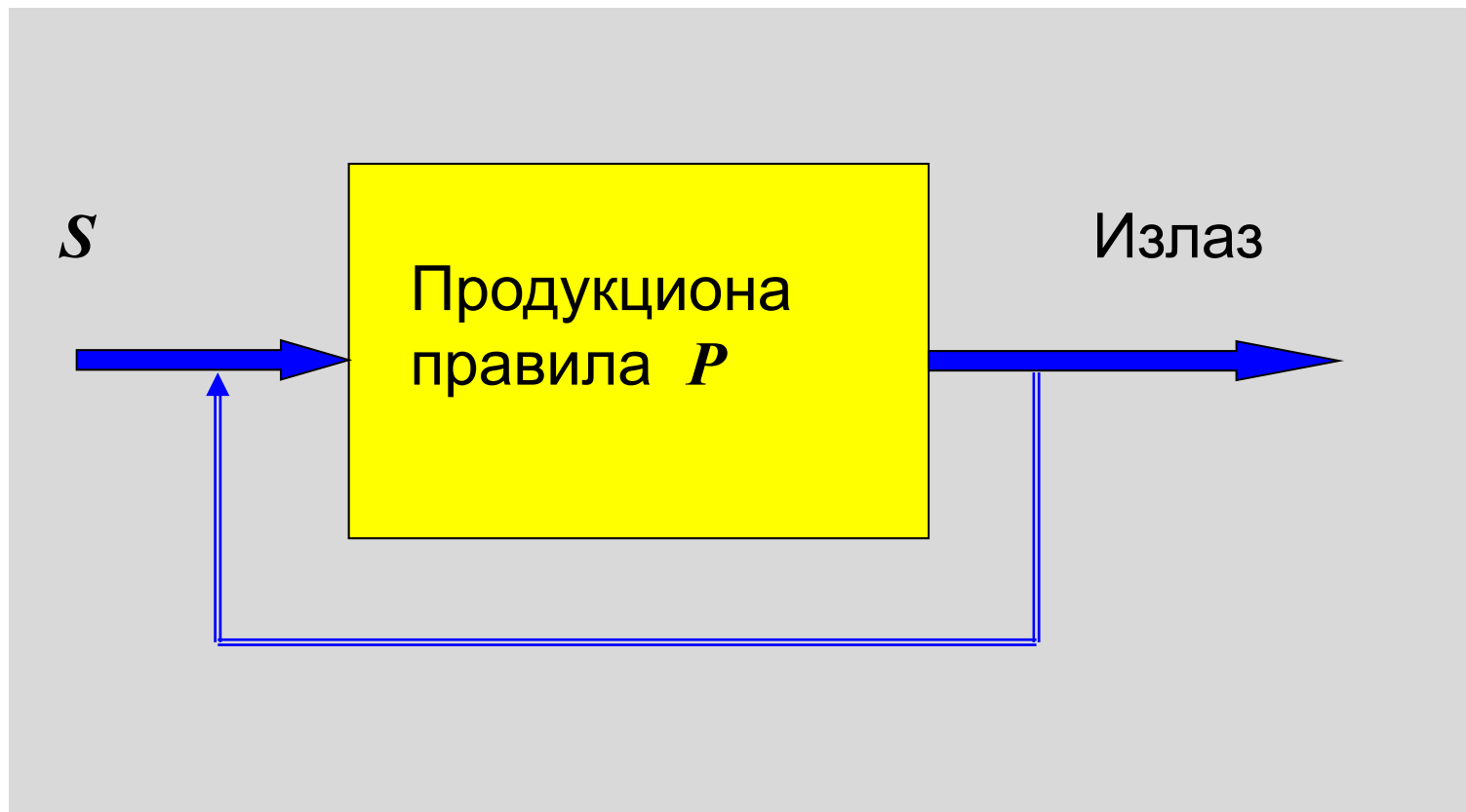
продукциона правила

$$P = \{a \rightarrow P(a), b \rightarrow P(b), c \rightarrow P(c), \dots\}$$

Развојни низ L -система:

$$S \rightarrow P(S) \rightarrow P(P(S)) \rightarrow \dots$$

Фрактална геометрија
L-системи



Фрактална геометрија

L-системи

Пример 1.

Азбука: $A = \{a, b, c\}$

Продукциона правила: $a \rightarrow abc$

$b \rightarrow b$

$c \rightarrow cba$

Аксиом: $S = a$

1. корак \longrightarrow

$a \rightarrow abc$

2. корак \longrightarrow

$abc \rightarrow abc \ b \ cba = abc b cba$

3. корак \downarrow

$abc b cba \rightarrow abc \ b \ cba \ b \ cba \ b \ abc = abc b cba b cba b abc$

Фрактална геометрија
L-системи

Н и з

$a \rightarrow abc \rightarrow abcbsba \rightarrow abcbsbabababc \rightarrow \dots$

је развојни низ задатог *L*-система.

Фрактална геометрија *L*-системи

Пример 2.

Азбука: $A = \{a, b\}$

Аксиом: $S = aba$

Ако у првом кораку

$S = aba \rightarrow abbaab$

одредити
продукциона
правила.

$S = aba \rightarrow abbaab$

$S = aba \rightarrow abbbaaab$

$S = aba \rightarrow abbbaabaab$

ПРОДУКЦИОНА ПРАВИЛА

$P = \{a \rightarrow ab, b \rightarrow ba\}$

Фрактална геометрија *L*-системи

Пример 2.

Азбука: $A = \{a, b\}$

Аксиом: $S = aba$

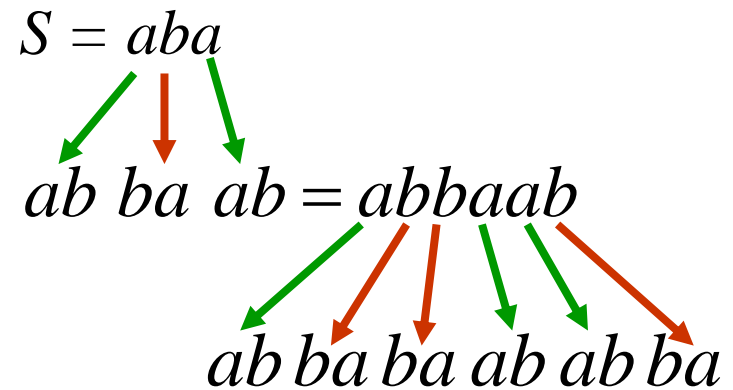
Ако у првом кораку

$S = aba \rightarrow abbaab$

Формирати стринг који следи
из S после два корака.

ПРОДУКЦИОНА ПРАВИЛА

$$P = \{a \rightarrow ab, b \rightarrow ba\}$$



2.корак

Фрактална геометрија L-системи

Пример 3.

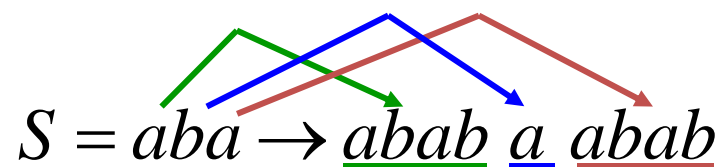
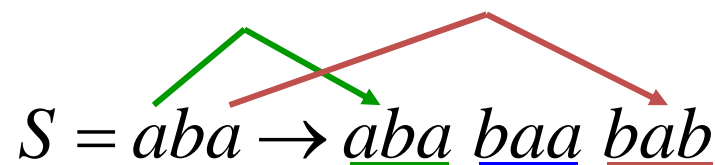
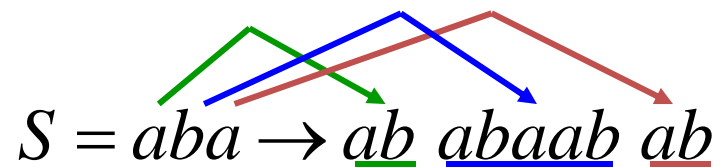
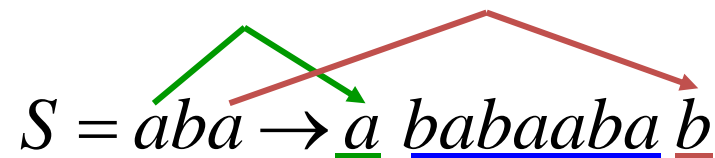
Азбука: $A = \{a, b\}$

Аксиом: $S = aba$

Ако у првом кораку

$S = aba \rightarrow ababaabab$

одредити могуће
скупове продукционих
правила.



$$P = \{a \rightarrow ab, b \rightarrow abaab\} \vee P = \{a \rightarrow abab, b \rightarrow a\}$$

Фрактална геометрија

L -системи 2D

За генерисање слике помоћу L -система неопходна је геометријска интерпретација азбуке.

Та геометријска интерпретација представља основ за превођење стринга у инструкције за цртање. Уобичајен алфабет је

$A = \{F, f, +, -\}$ са следећом геометријском интерпретацијом:

F	померање један корак унапред уз исцртавање линије
f	померање један корак унапред без исцртавања линије
$+$	ротација у позитивном смеру (супротном кретању казаљки на сату) за дати угао односно скретање лево за дати угао
$-$	ротација у негативном смеру (у смеру кретања казаљки на сату) за дати угао односно скретање десно за дати угао

Фрактална геометрија

L -системи

$$A = \{F, f, +, -, [,]\}$$

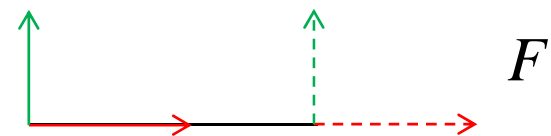
[- меморисање тренутне позиције и правца – стављање податка у stack

] - очитавање меморисане позиције и правца – вађење податка из stack-а

Фрактална геометрија

L -системи

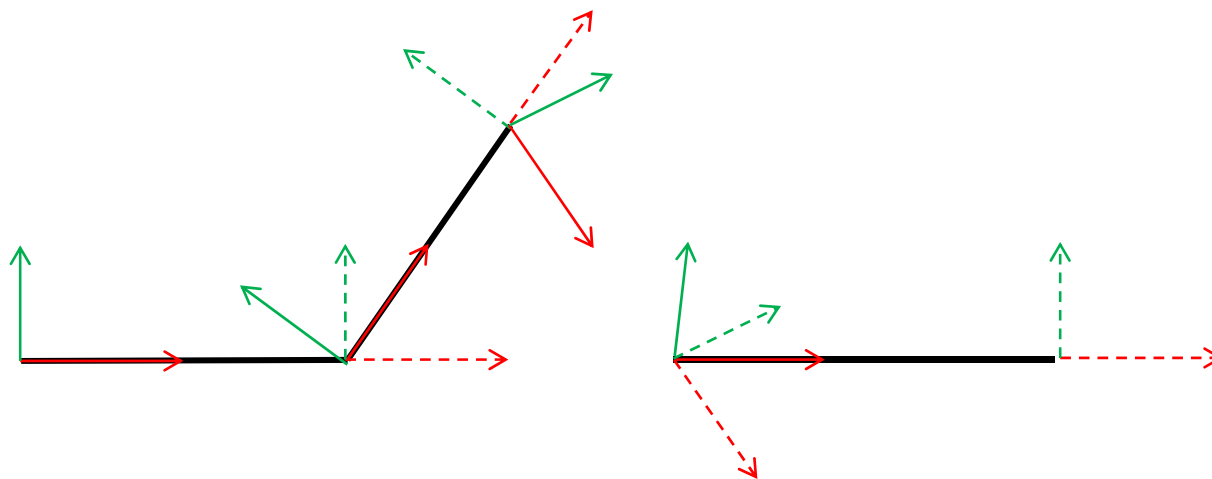
исцртавање - трансформација координатног система



FF



FfF



$F + F - - f + F$

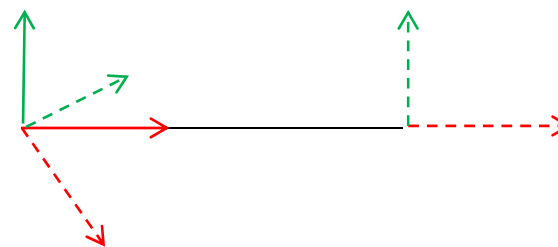
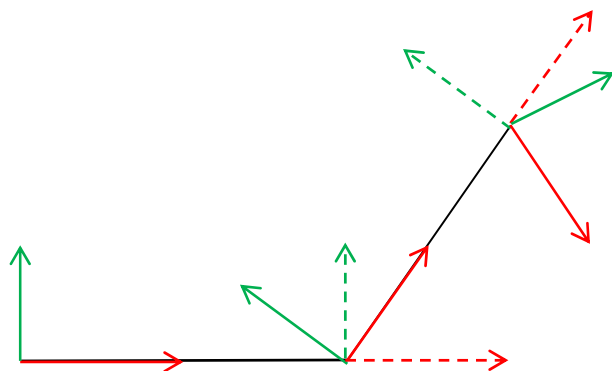
Ugao rotacije

$\theta = 60^\circ$

Фрактална геометрија

L -системи

исцртавање - трансформација координатног система



У сваком кораку, у оквиру одговарајућег координатног система исцртава се иста линија, исте дужине, дуж x -осе полазећи од координатног почетка. То је линија која спаја координатни почетак са тачком на x -оси $(0,1)$

$Line(0,0,0,1)$

Фрактална геометрија

L -системи – Кохова крива

Пример 3.

Нека је L -систем задат помоћу азбуке $A = \{F, +, -\}$ аксиома $S = F$ и продукционих правила:

$$F \rightarrow F + F - -F + F \quad + \rightarrow + \quad - \rightarrow -$$

1.корак $F + F - -F + F$

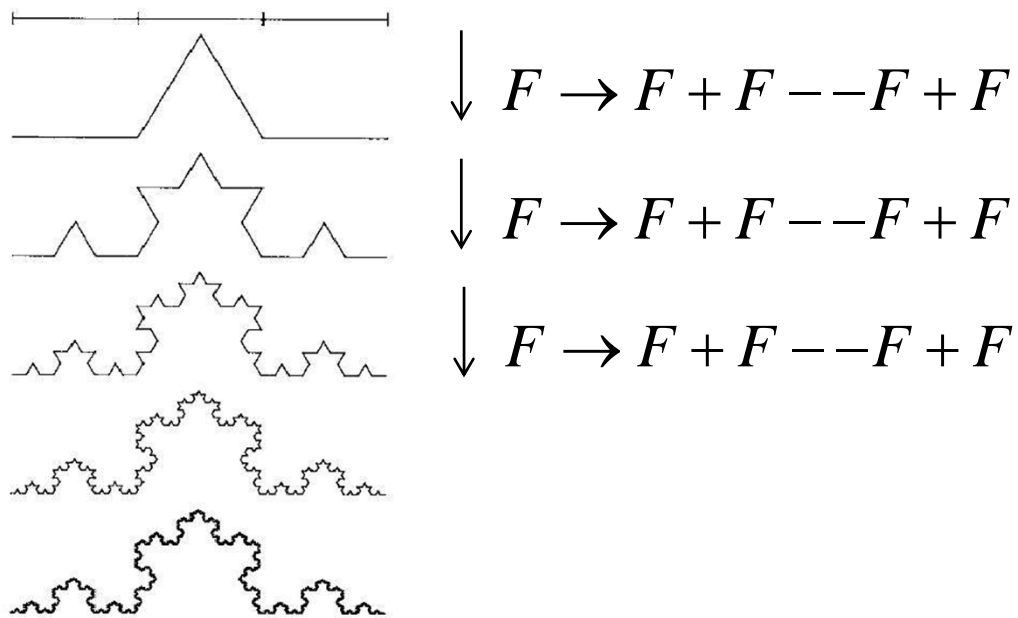
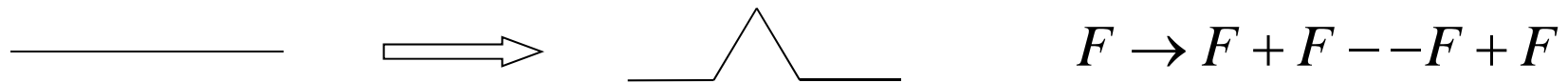
2.корак $F + F - -F + F$ + $F + F - -F + F$ - - $F + F - -F + F$ + $F + F - -F + F$

Узимајући за угао ротације $\theta = 60^\circ$ овај L -систем генерише Кохову криву.



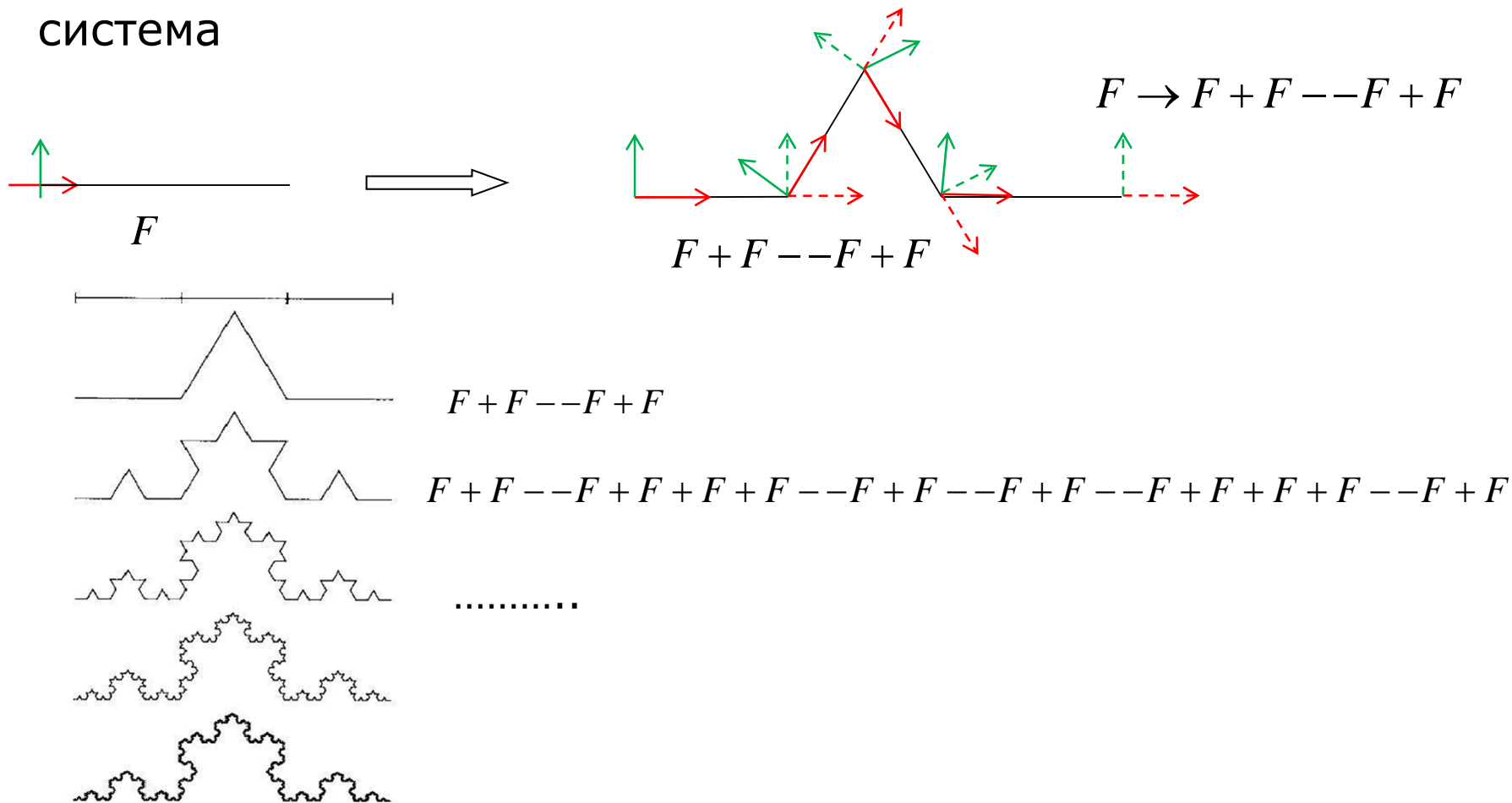
Фрактална геометрија

L-системи – Кохова крива



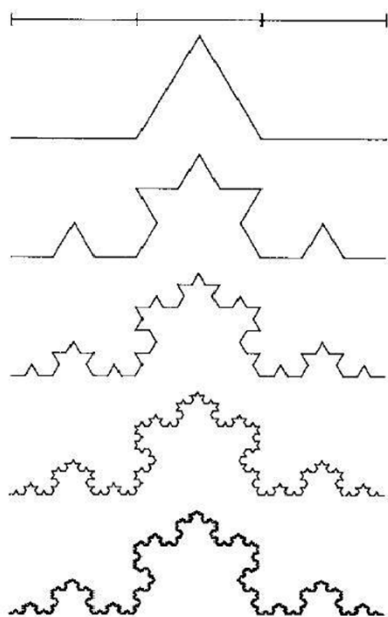
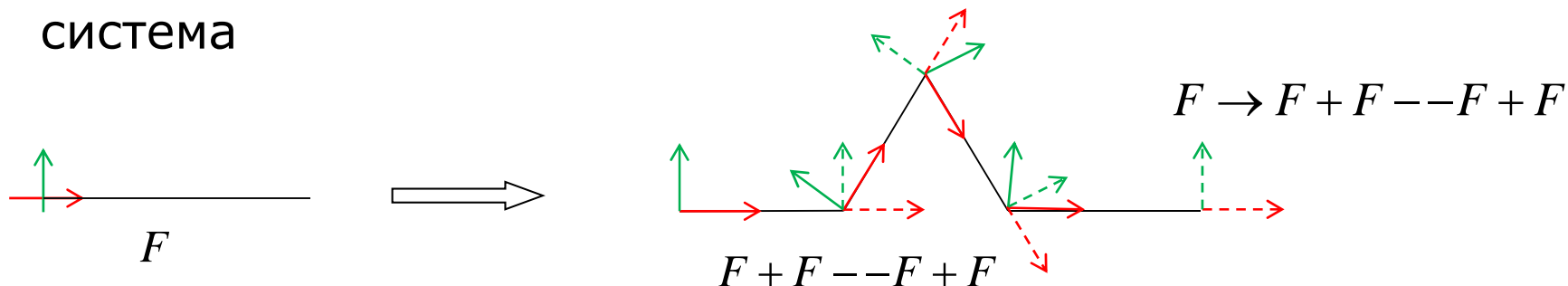
Фрактална геометрија

L -системи – Кохова крива – трансформације координатног система



Фрактална геометрија

L -системи – Кохова крива – трансформације координатног система



Трансформације координатног система:

Скалирање са $\frac{1}{3}$ у правцу x -осе осе

Транслација за вектор $(1,0)$

Ротација за дефинисан угао ротације у позитивном и негативном смеру

Фрактална геометрија L -системи – Канторов скуп

Пример 4.

Нека је L -систем задат помоћу азбуке $A = \{F, f\}$ аксиома $S = F$
и продукционих правила:

$$F \rightarrow FfF \qquad f \rightarrow fff$$

1.корак $F \rightarrow FfF$

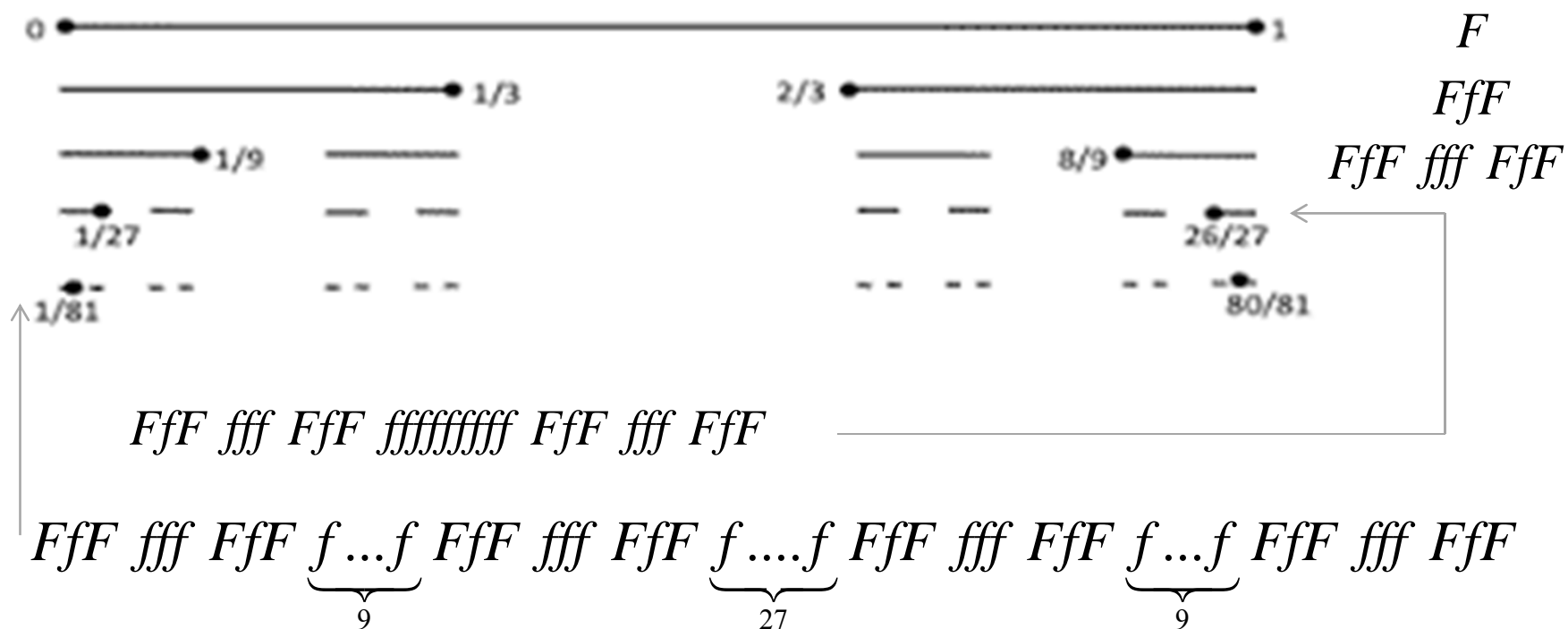
2.корак $FfF \rightarrow FfF fff FfF = FfFfffFfF$

Овај L -систем генерише Канторов скуп.

Фрактална геометрија
L-системи – Канторов скуп

$$F \rightarrow FfF$$

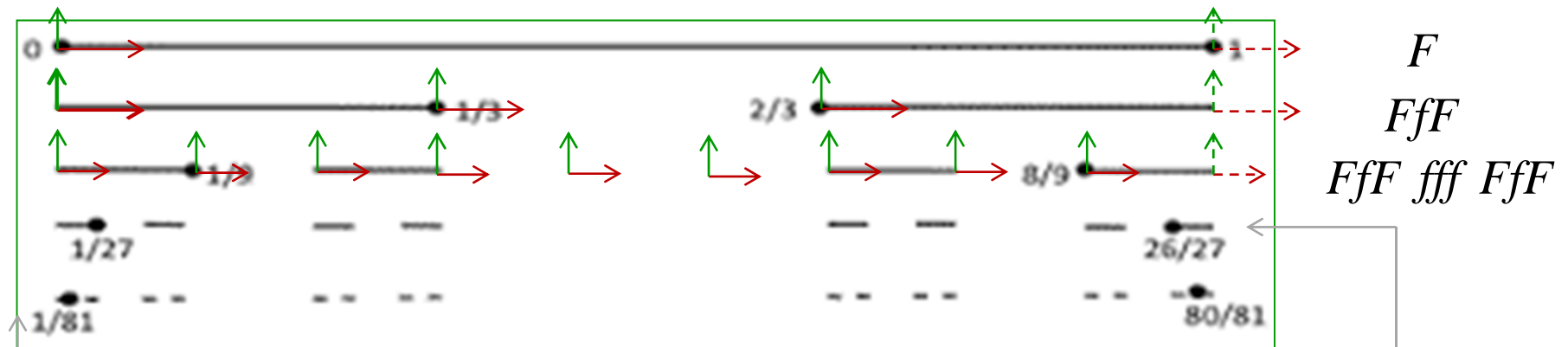
$$f \rightarrow fff$$



Фрактална геометрија
L-системи – Канторов скуп

$$F \rightarrow FfF$$

$$f \rightarrow fff$$



$$FfF \ fff \ FfF \ fffffff \ FfF \ fff \ FfF$$

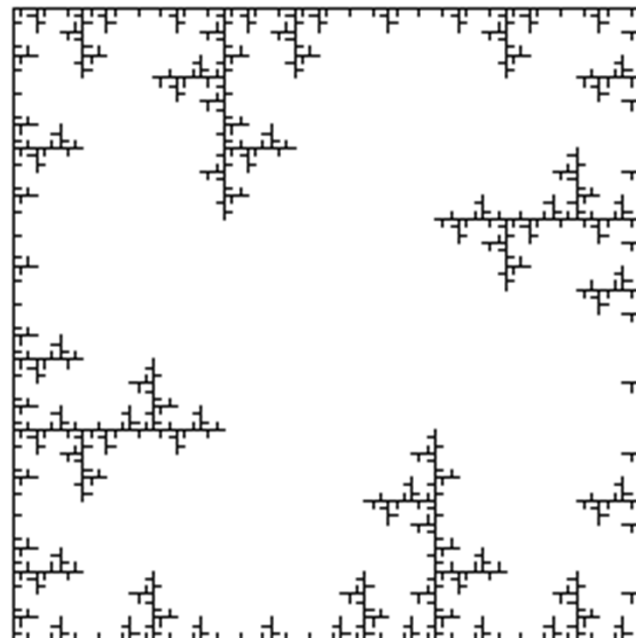
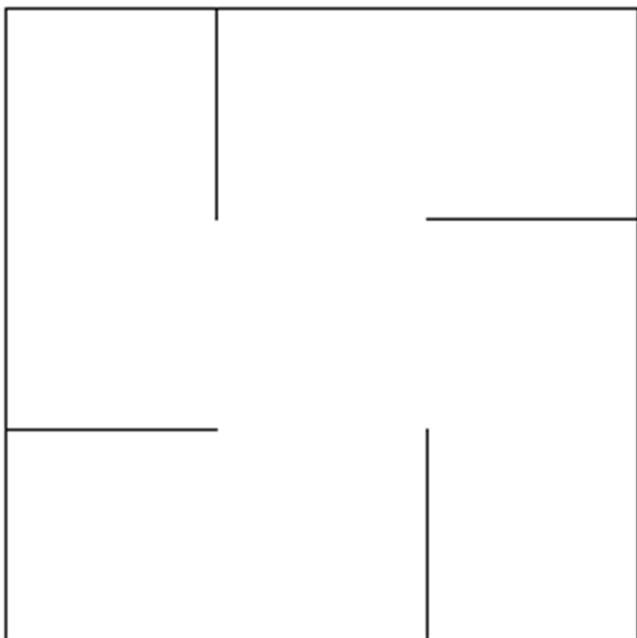
$$FfF \ fff \ FfF \ \underbrace{f \dots f}_9 \ FfF \ fff \ FfF \ \underbrace{f \dots f}_{27} \ FfF \ fff \ FfF \ \underbrace{f \dots f}_9 \ FfF \ fff \ FfF$$

Трансформације координатног система: скалирање, translација

Фрактална геометрија

L -системи - једноставни L -системи

Пример 5.



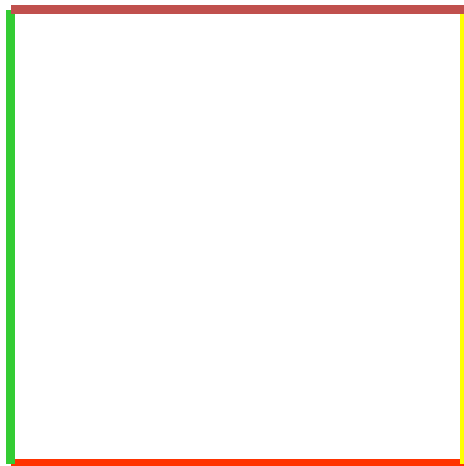
Фрактална геометрија

L-системи - примери

азбука $A = \{F, +\}$

aksiom

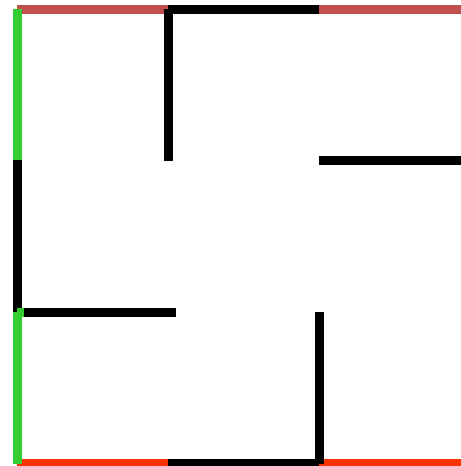
$$S = F + F + F + F$$



pravilo

$$F \rightarrow FF + F + +F + F$$

$$\theta = 90^\circ$$

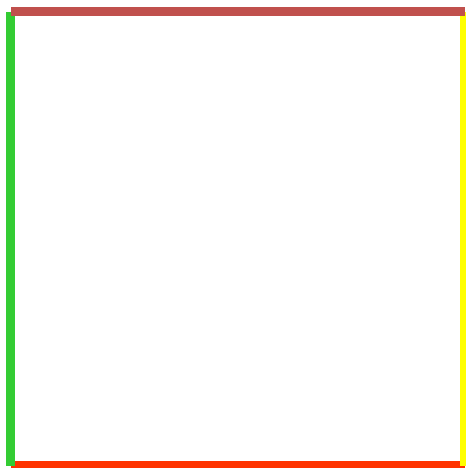


Фрактална геометрија
L-системи - примери

азбука $A = \{F, +\}$

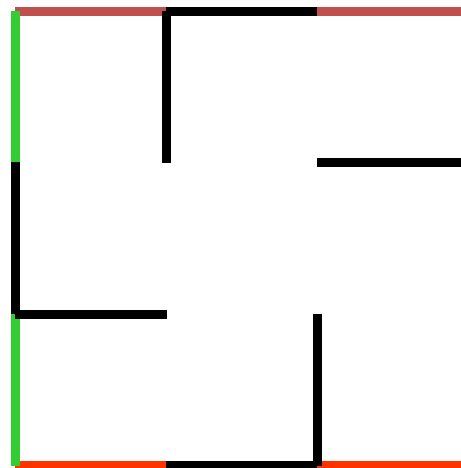
aksiom

$$S = F + F + F + F$$



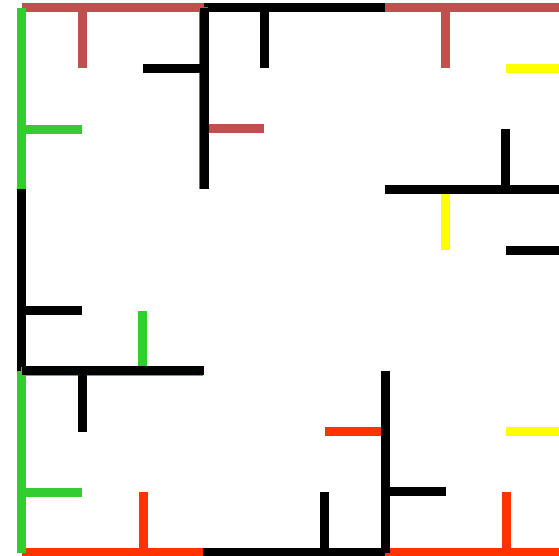
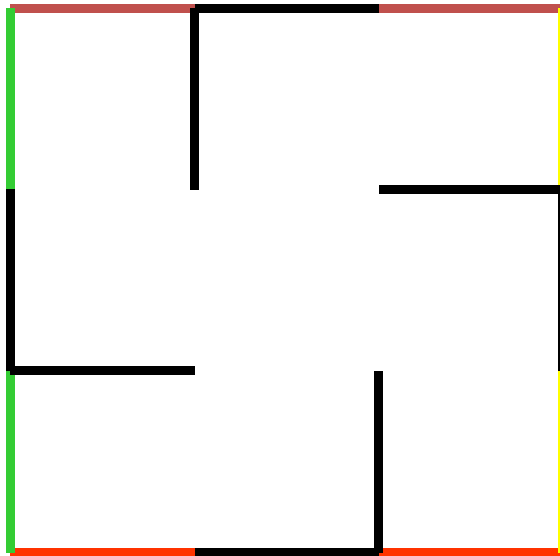
pravilo

$$F \rightarrow FF + F + +F + F$$



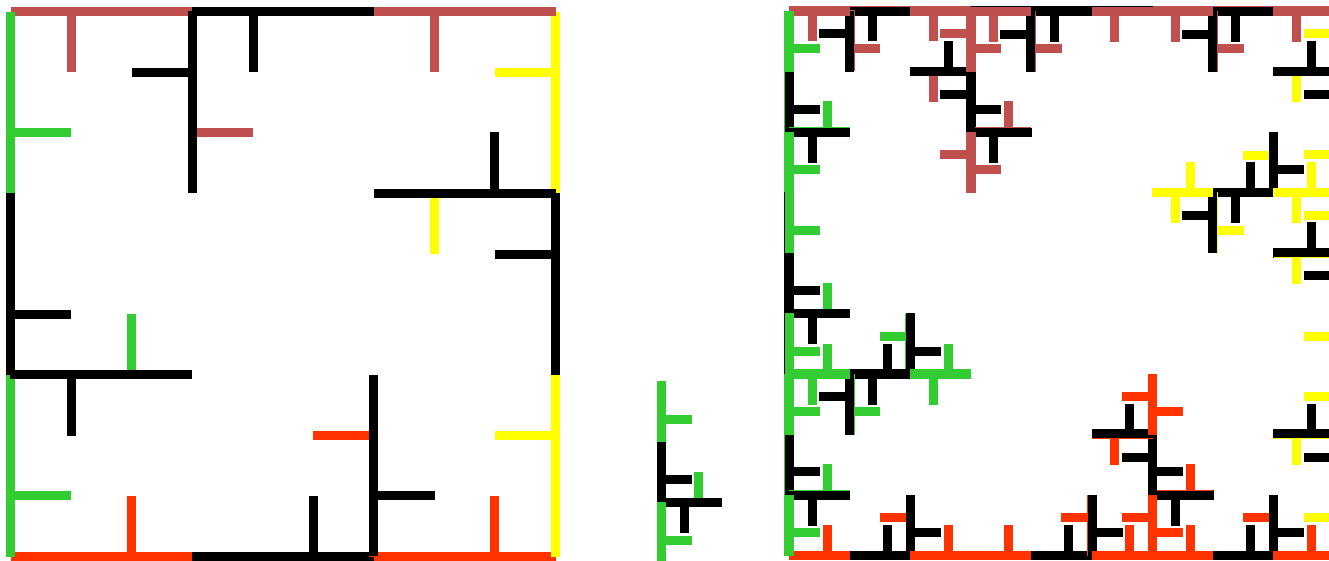
Фрактална геометрија
L-системи - примери

$$F \rightarrow FF + F + F + F$$



Фрактална геометрија
L-системи - примери

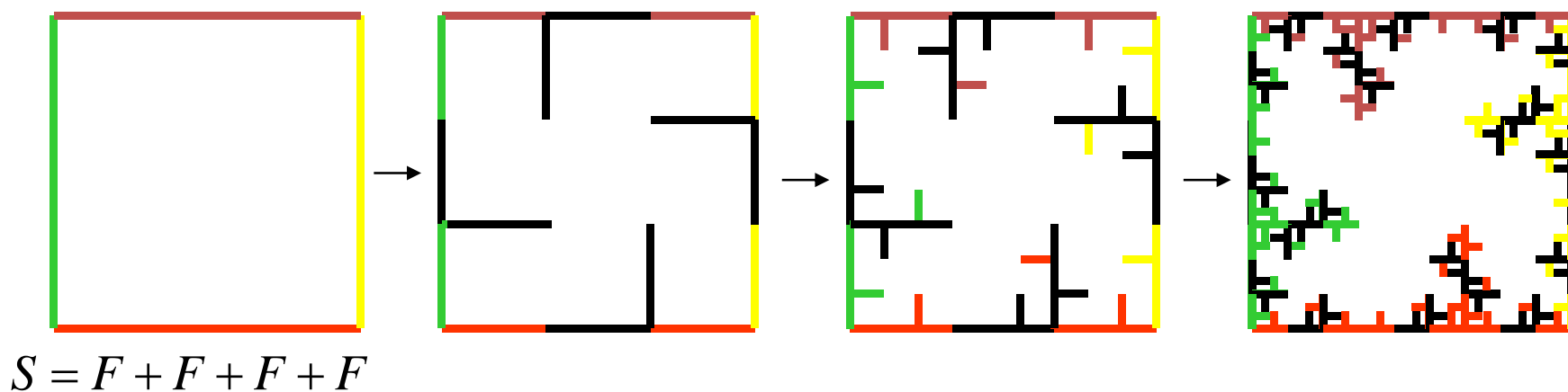
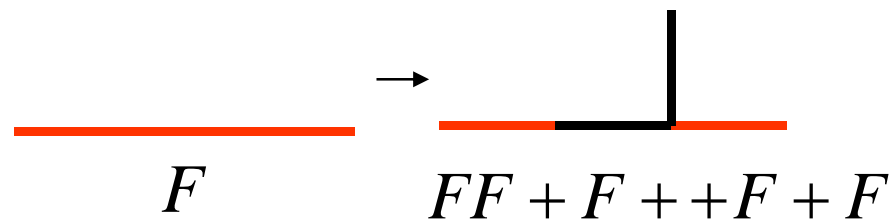
$$F \rightarrow FF + F + +F + F$$



Фрактална геометрија

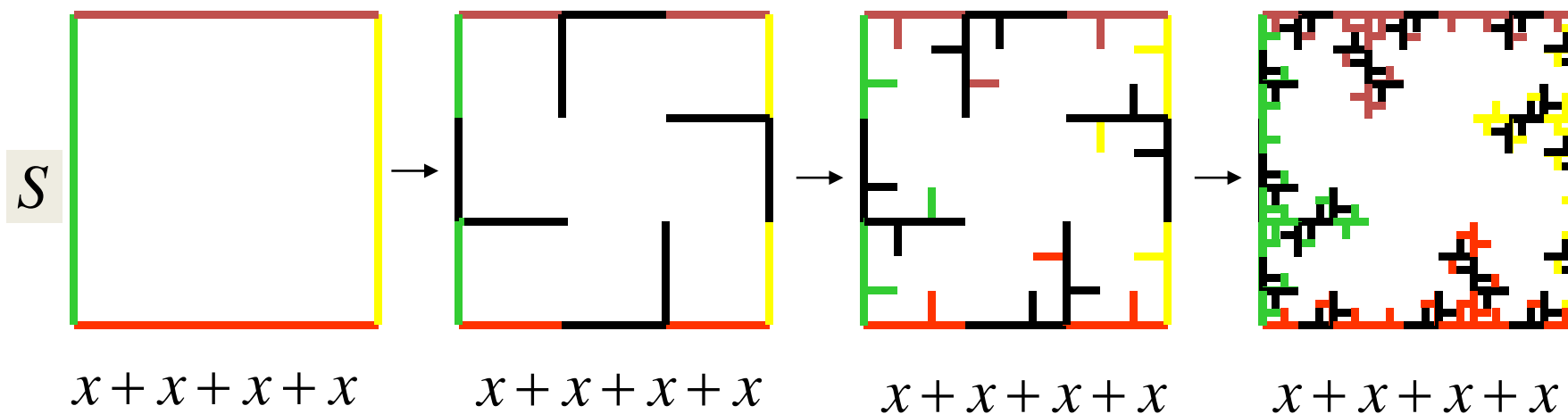
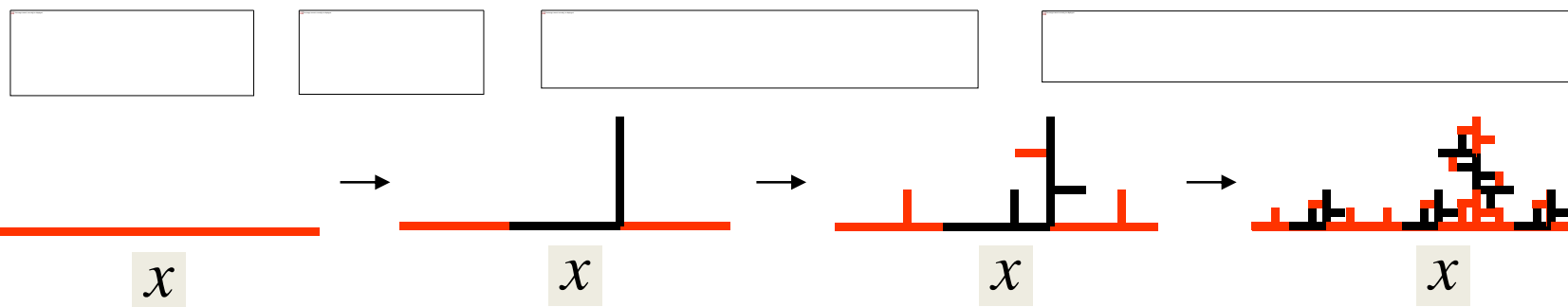
L -системи - примери

$$A = \{F, +\} \quad S = F + F + F + F \quad F \rightarrow FF + F + F + F$$



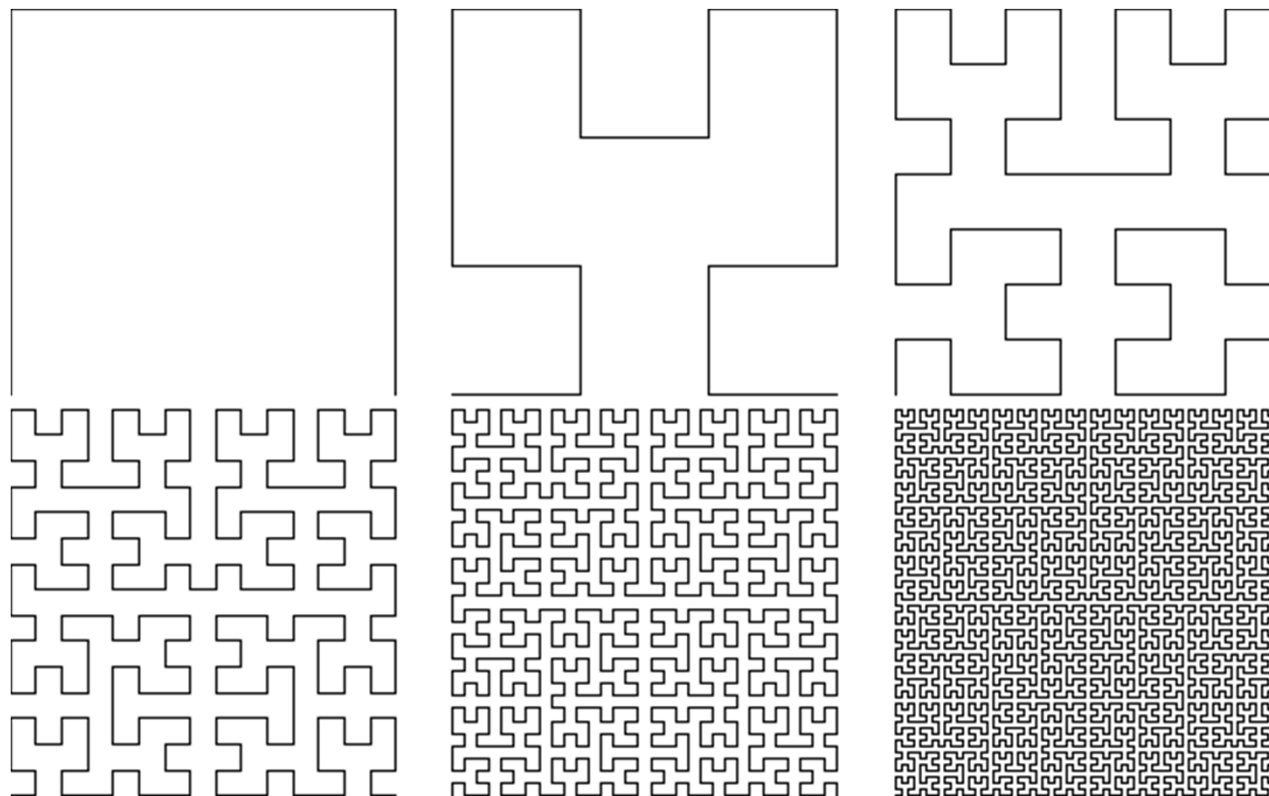
Фрактална геометрија

L-системи - примери

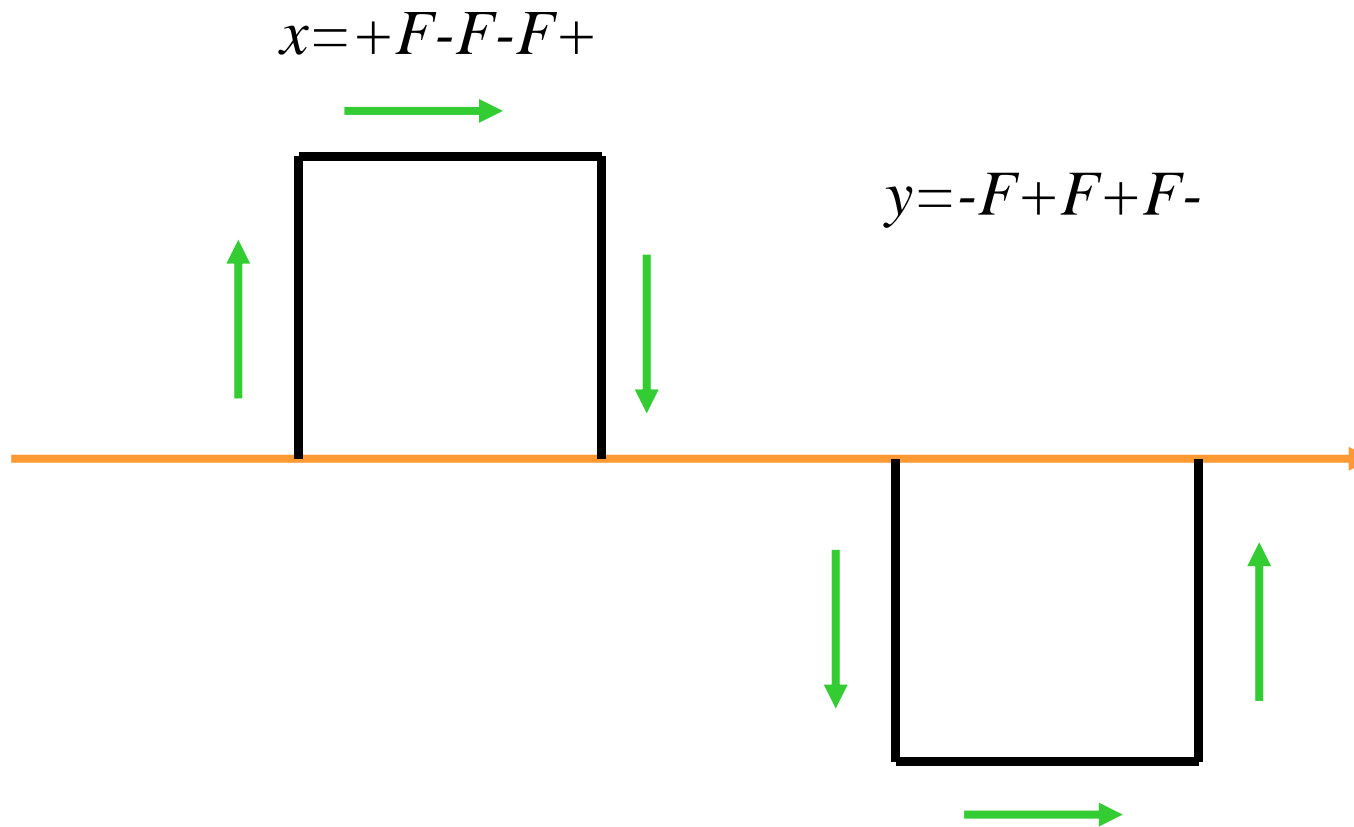


Фрактална геометрија

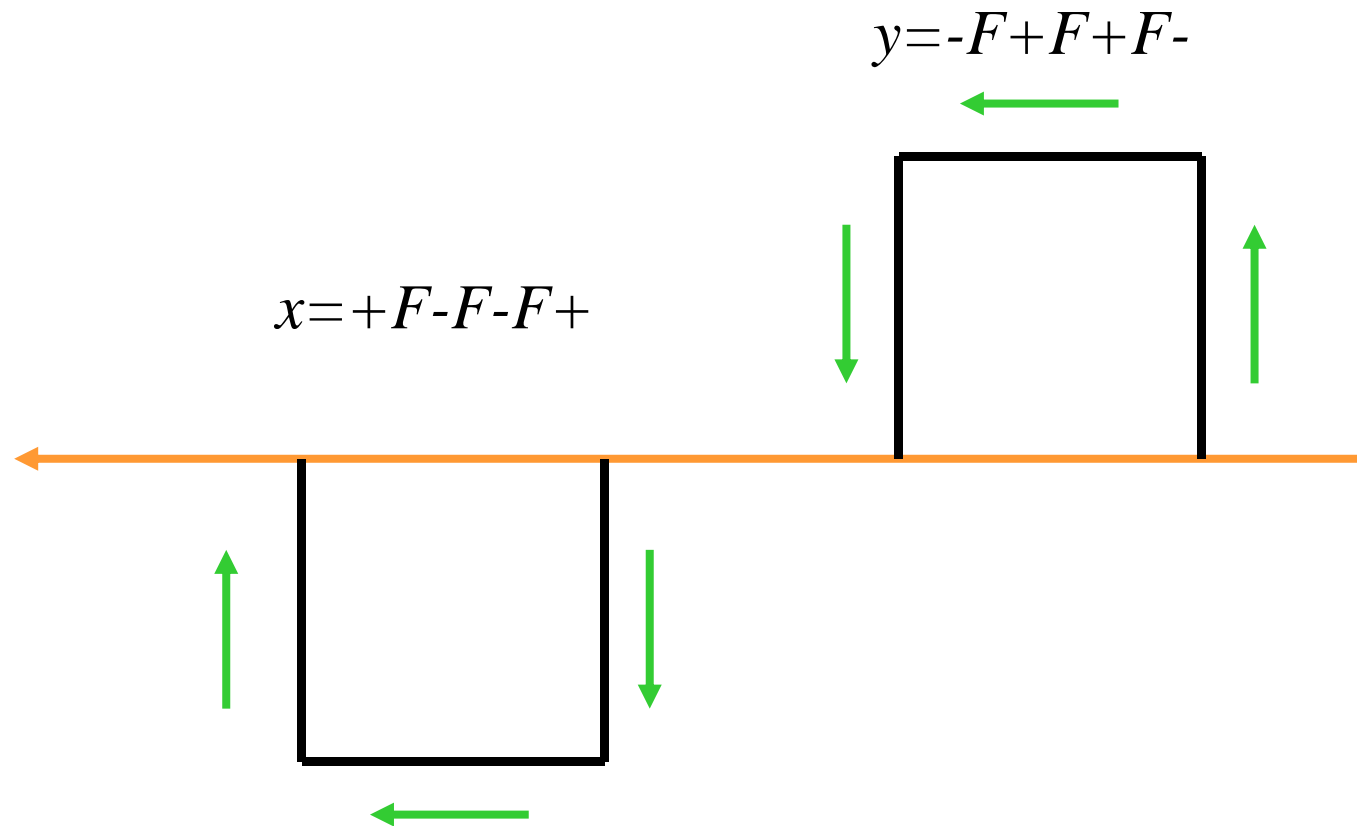
L -системи – Хилбертова крива



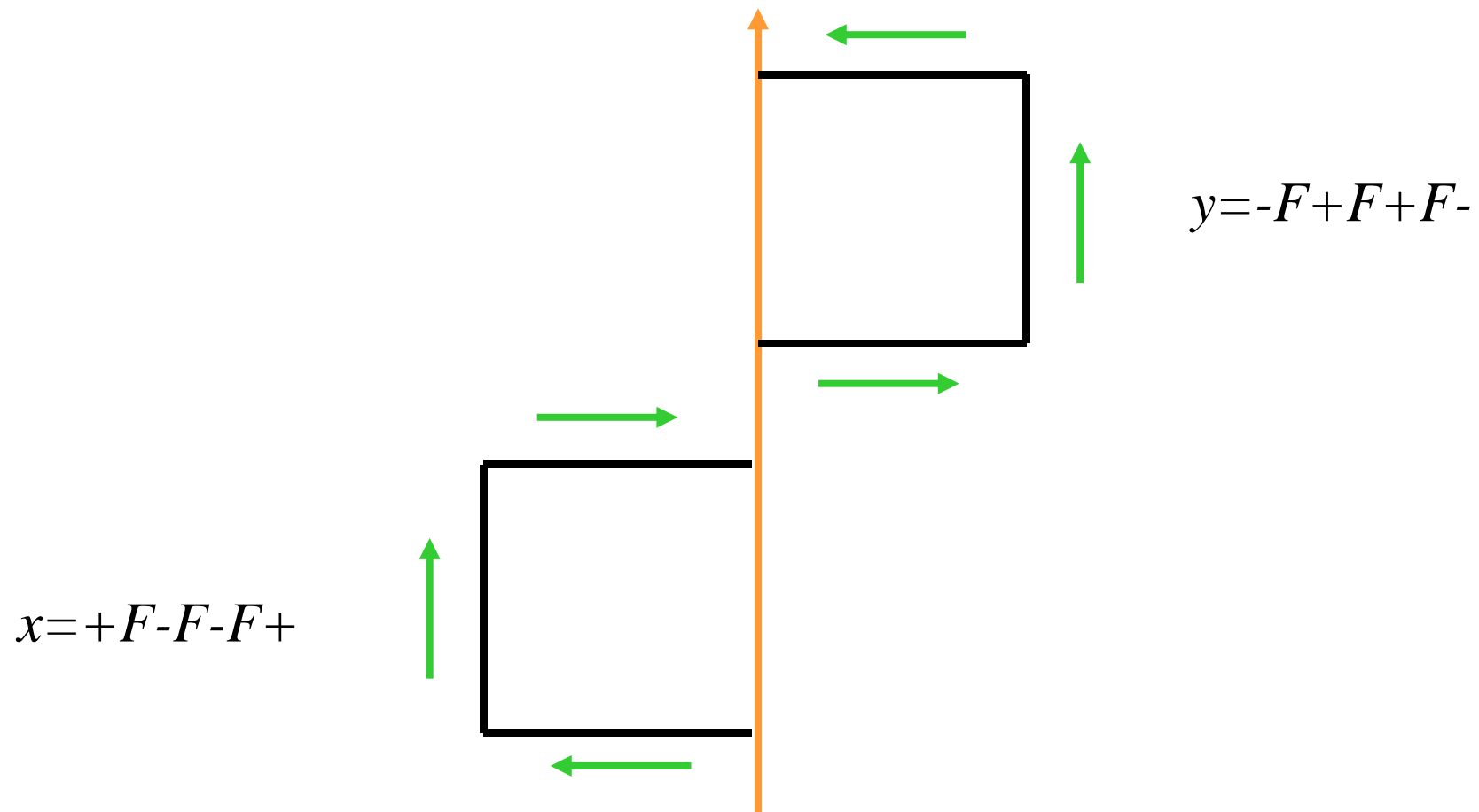
Фрактална геометрија
L-системи – Хилбертова крива



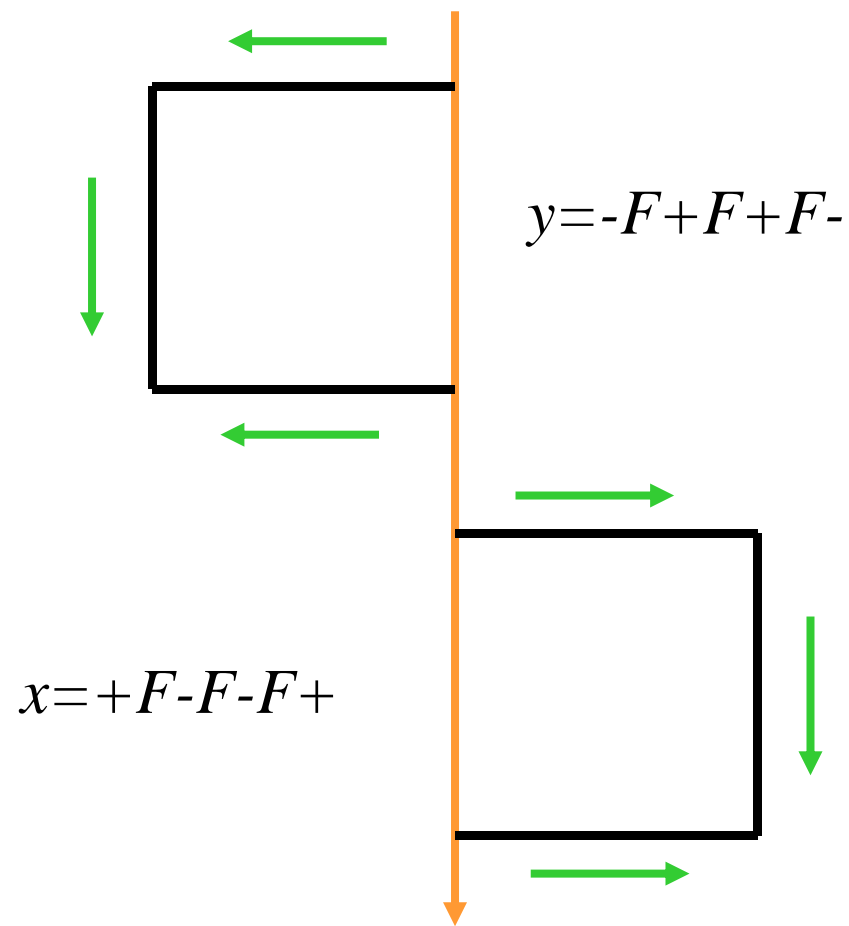
Фрактална геометрија
L-системи – Хилбертова крива



Фрактална геометрија
L-системи – Хилбертова крива



Фрактална геометрија
L-системи – Хилбертова крива



Фрактална геометрија

L-системи – Хилбертова крива

$$x = +F - F - F +$$

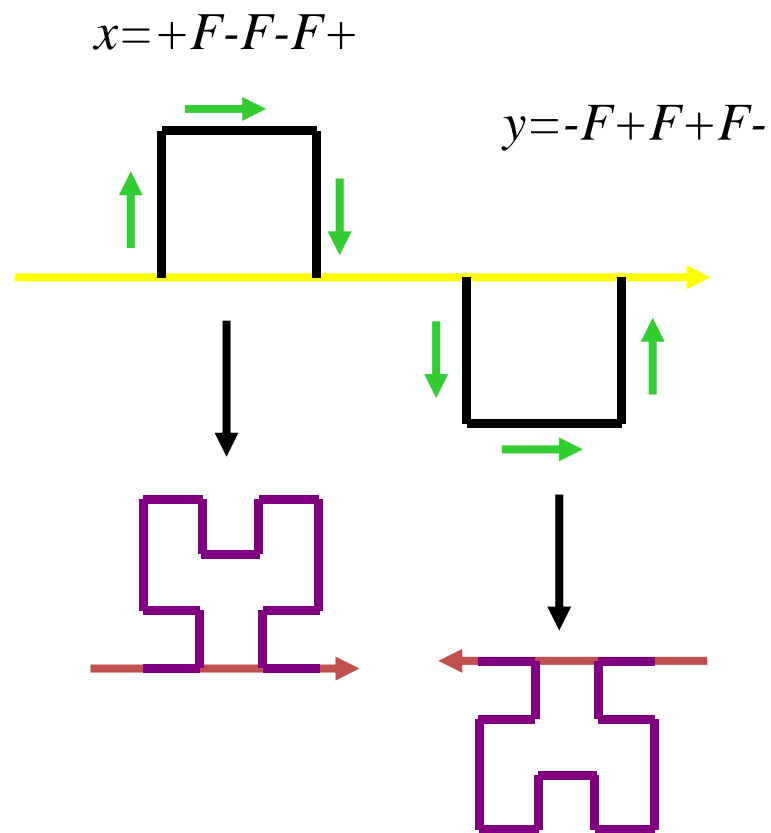
$$y = -F + F + F -$$

АКСИОМ: $S = x$

ПРАВИЛА:

$$x = + y F - x F x - F y +$$

$$y = - x F + y F y + F x -$$



Фрактална геометрија

L-системи – Хилбертова крива

$$x = +F - F - F +$$

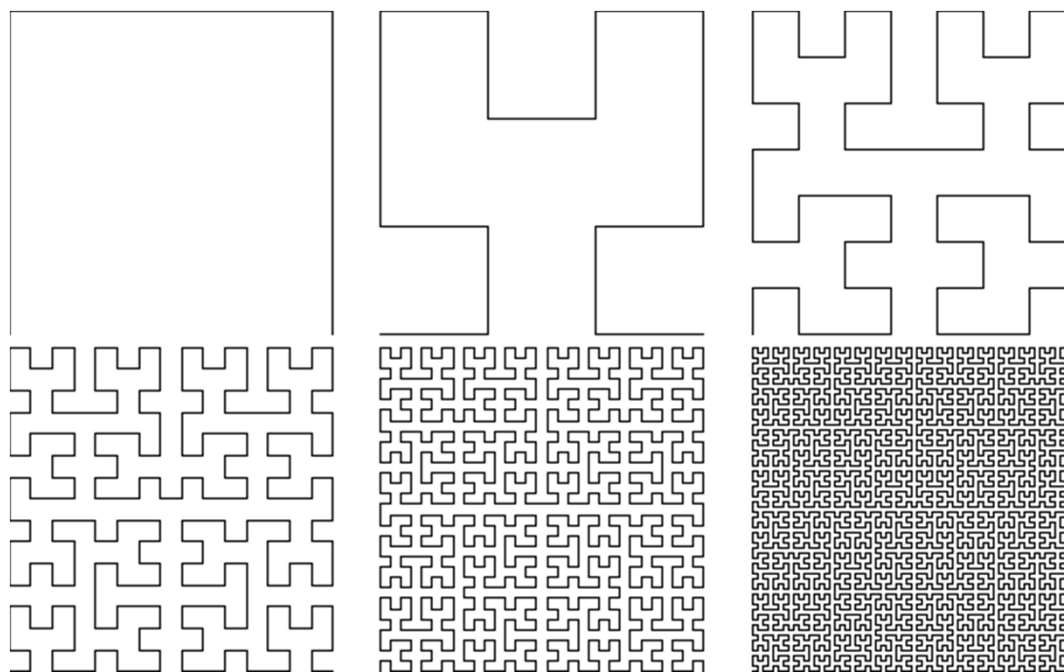
$$y = -F + F + F -$$

АКСИОМ: $S = x$

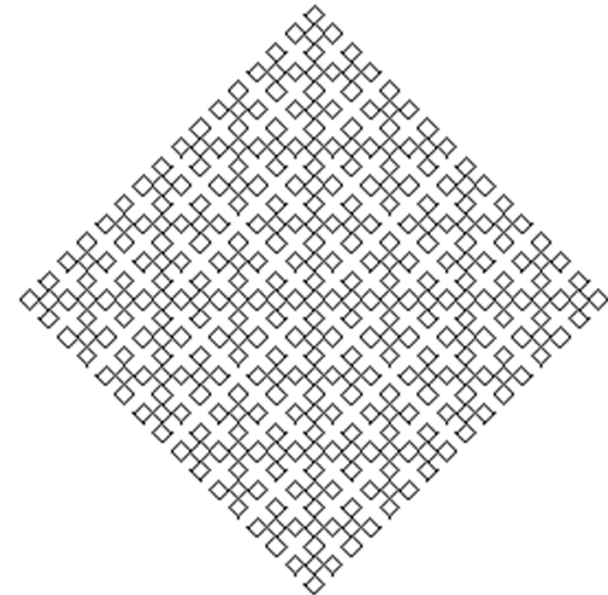
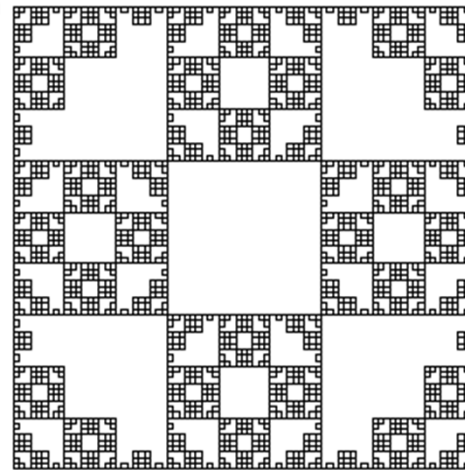
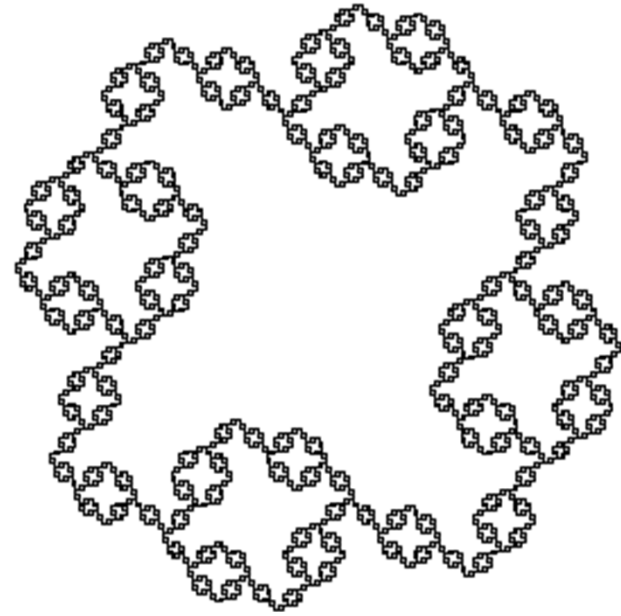
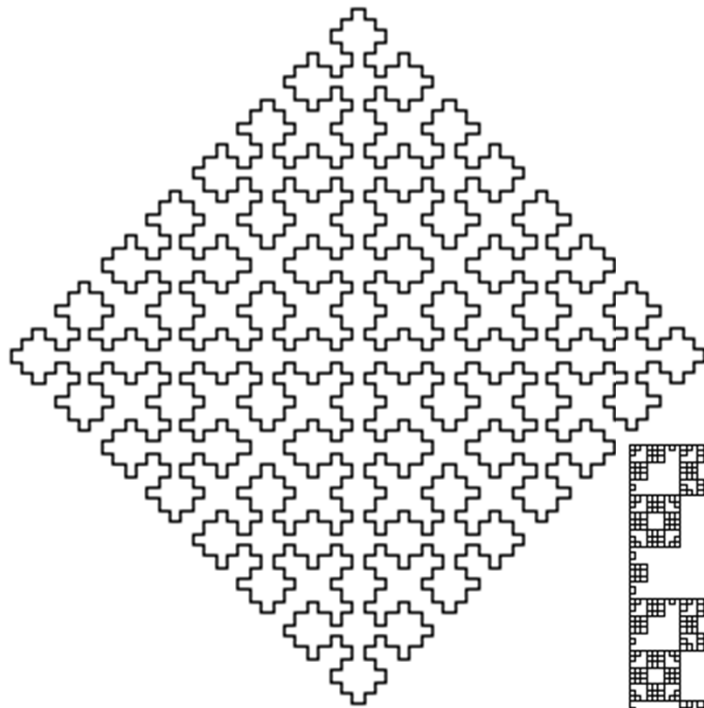
ПРАВИЛА:

$$x = + y F - x F x - F y +$$

$$y = - x F + y F y + F x -$$



Фрактална геометрија
L-системи - примери

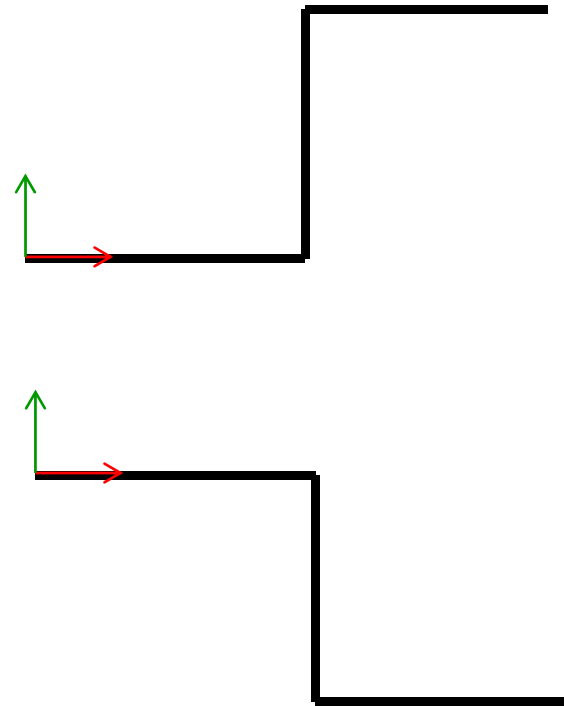
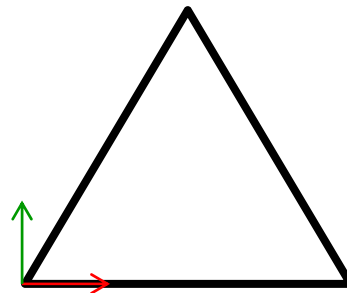
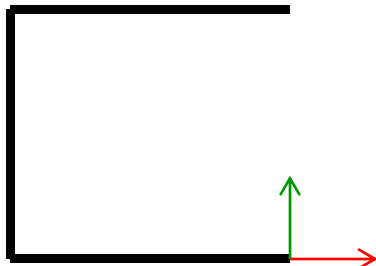
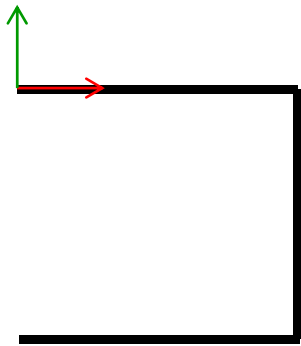


Фрактална геометрија
L-системи - примери

$$A = \{F, f, +, -\}$$

$$A = F \quad \alpha = 90^\circ$$

$$F = F + F - F$$



Prva iteracija

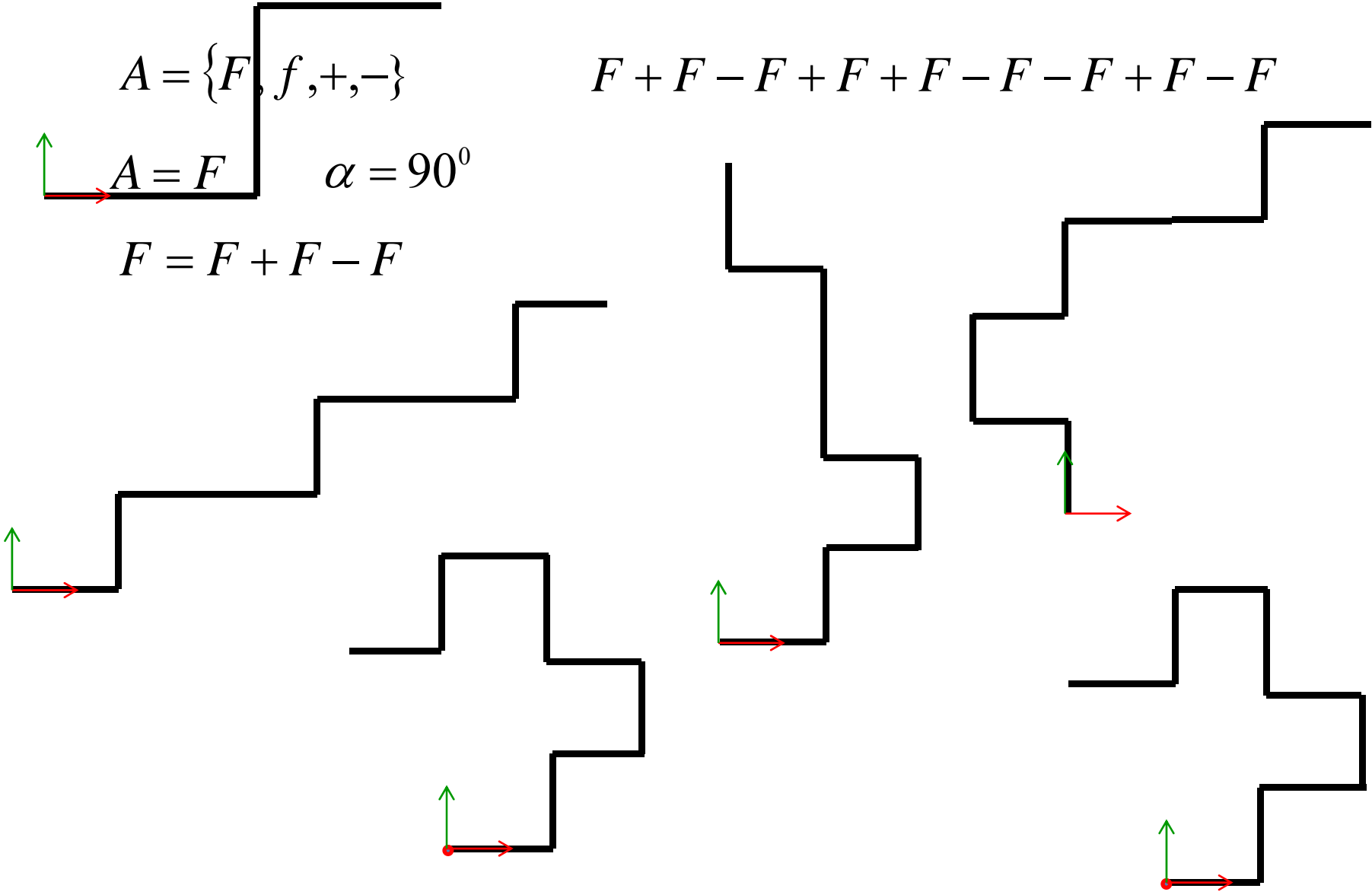
Druga iteracija

$$A = \{F, f, +, -\}$$

$$A = F \quad \alpha = 90^\circ$$

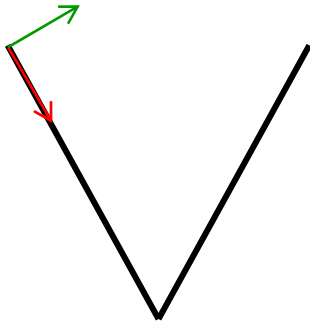
$$F = F + F - F$$

$$F + F - F + F + F - F - F + F - F$$

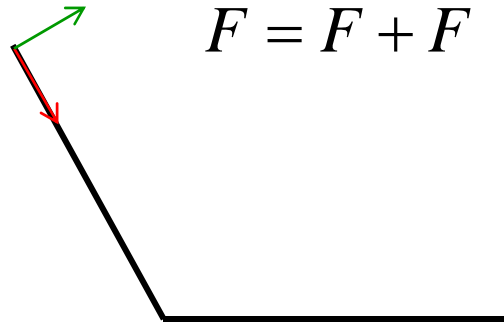


$$F = F + + F$$

$$\alpha = 60^{\circ}$$

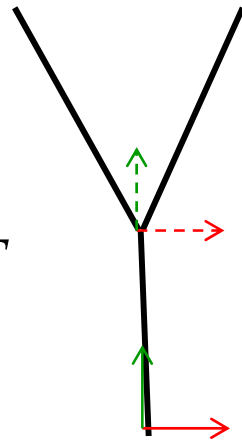


$$F = F + F$$

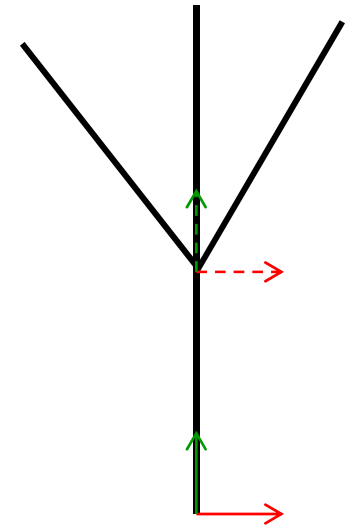


$$\alpha = 30^{\circ}$$

$$F = F[+F] - F$$



$$F = F[+F][F] - F$$



$$\alpha = 50^\circ$$

$$F = F[+F]F[F] - F$$

$$F = F[+F]F[-F]F$$

$$F = F[+F]F[F] + F$$

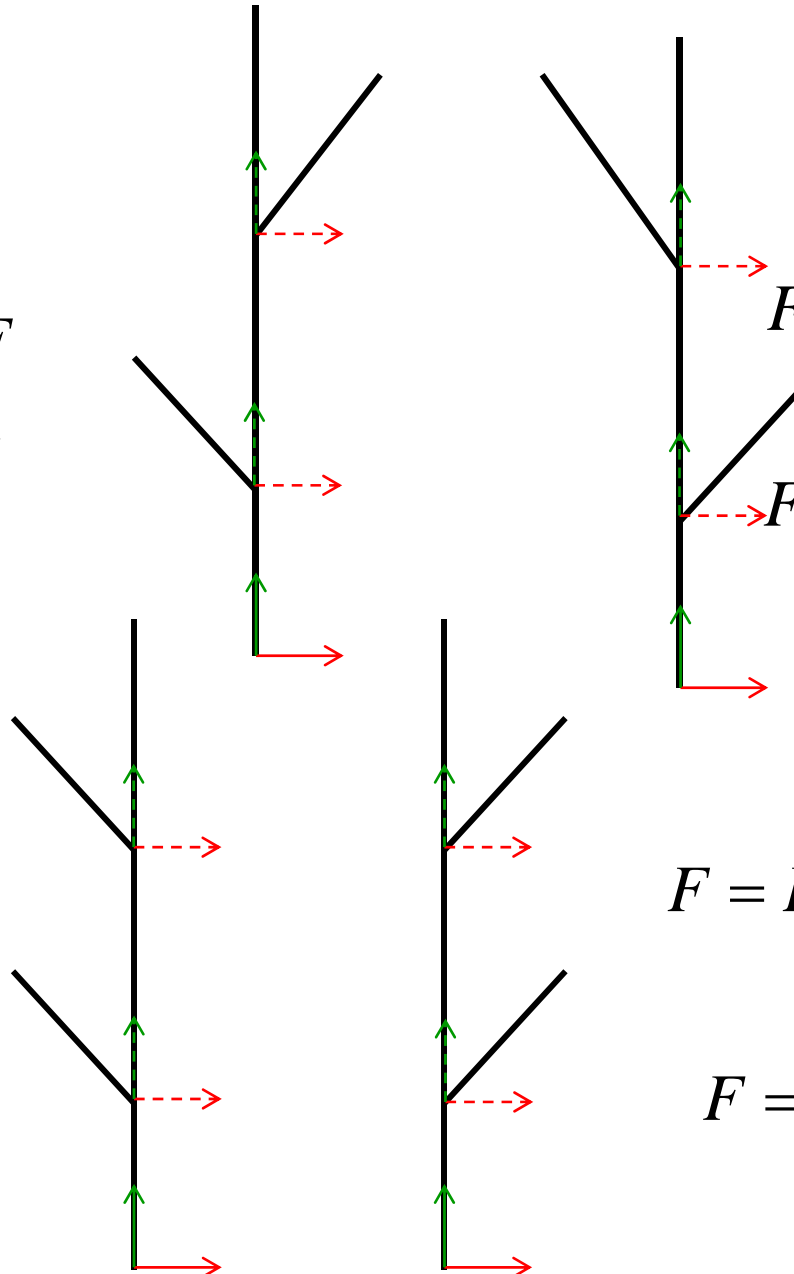
$$F = F[+F]F[+F]F$$

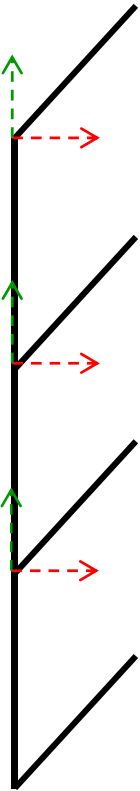
$$F = F[-F]F[F] + F$$

$$F = F[-F]F[+F]F$$

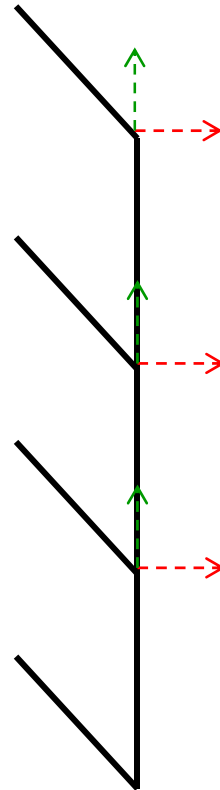
$$F = F[-F]F[F] - F$$

$$F = F[-F]F[-F]F$$





$$F = [-F]F[-F]F[-F]F - F$$



$$F = [+F]F[+F]F[+F]F + F$$