

GEOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE

GEOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE

Kada su u pitanju geometrijske transformacije, mora se biti veoma pažljiv u odnosu na objekat koji se transformiše.

Imamo dve alternative:

transformacija objekta,

transformacija koordinatnog sistema.

U ovom delu govorimo o geometrijskim transformacijama objekata u fiksiranom globalnom koordinatnom sistemu.

EUKLIDSKE GEOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE

EUKLIDSKE GEOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE :

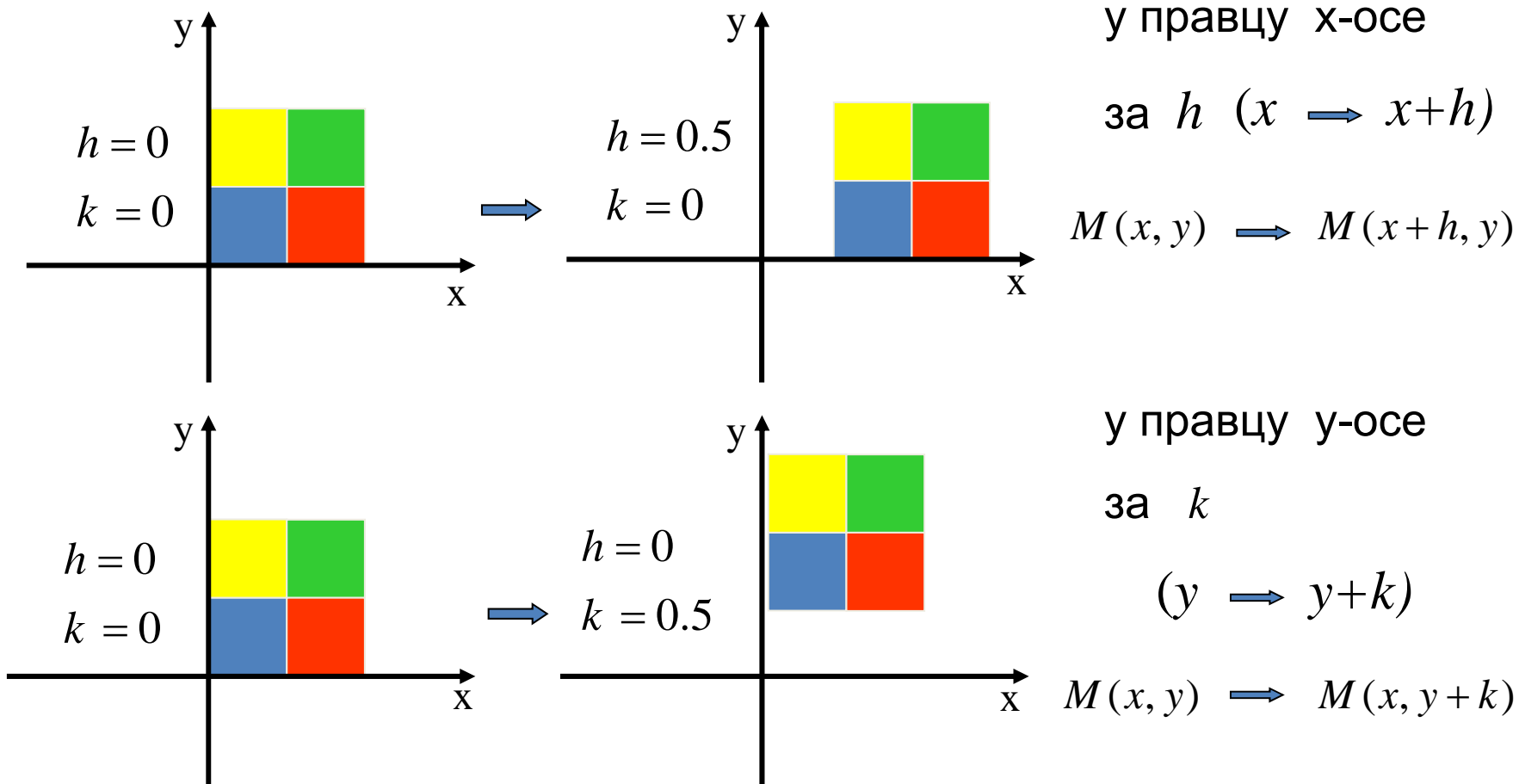
Translacija

Rotacija

Refleksija

TRANSLACIJA U RAVNI

транслација



у правцу x -осе

за h ($x \rightarrow x+h$)

$$M(x, y) \rightarrow M(x+h, y)$$

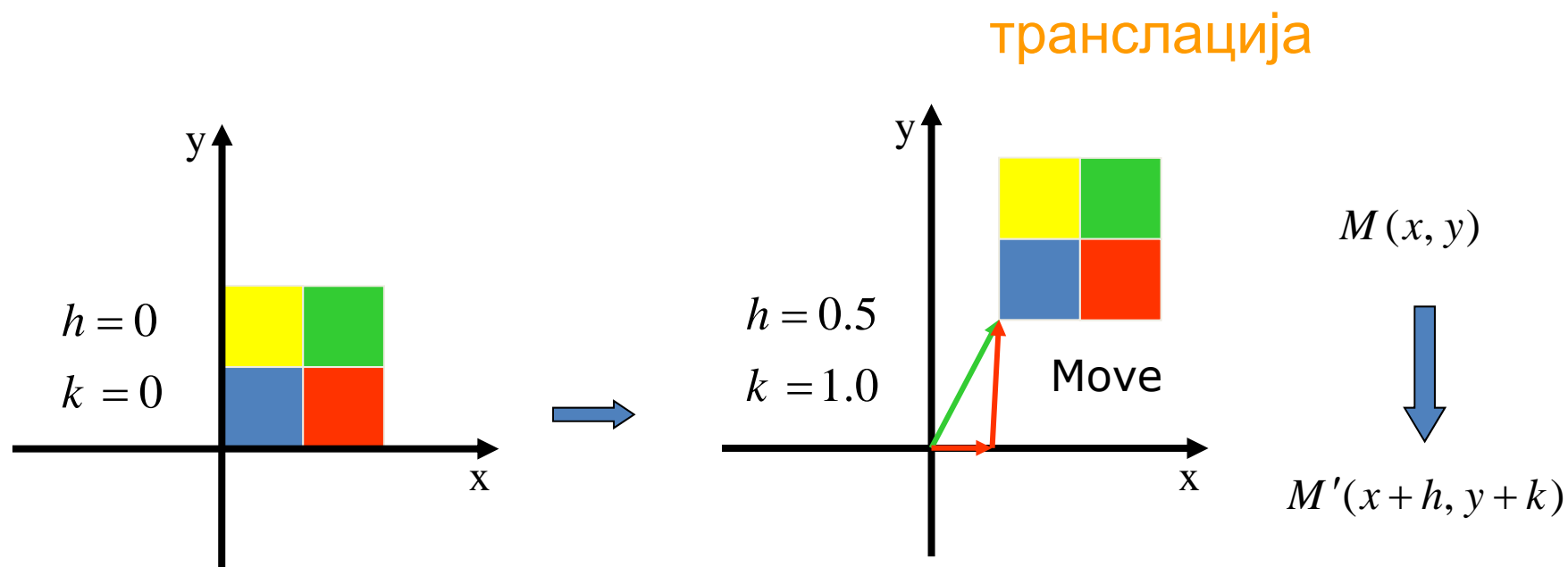
у правцу y -осе

за k

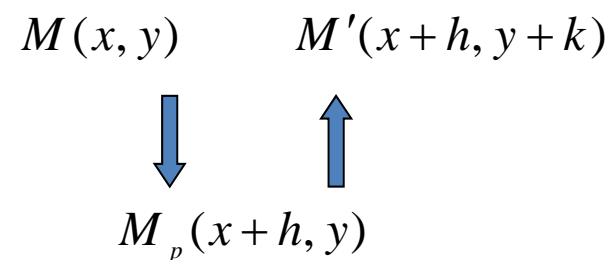
$$(y \rightarrow y+k)$$

$$M(x, y) \rightarrow M(x, y+k)$$

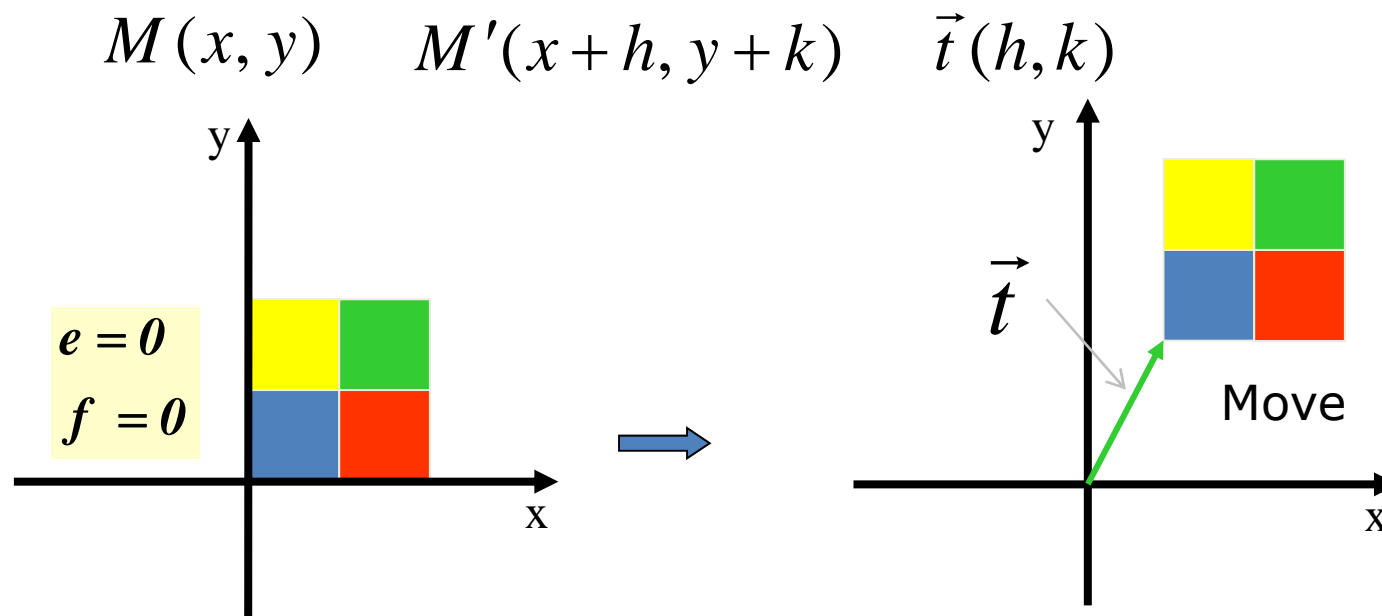
TRANSLACIJA U RAVNI



Свака транслација је композиција
транслације у правцу x -осе и
транслације у правцу y -осе



TRANSLACIJA U RAVNI



$$M(x, y) \longrightarrow M'(x', y')$$

$$x' = x + h$$

$$y' = y + k$$

TRANSLACIJA U RAVNI

Homogene koordinate

$$M(x, y) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M'(x', y') \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M(x, y) \longrightarrow M'(x', y')$$

$$x' = x + h$$

$$y' = y + k$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + h$$

$$y' = y + k$$

$$1 = 1$$

TRANSLACIJA U RAVNI

Homogene koordinate

$$x' = x + h$$

$$y' = y + k$$

$$1 = 1$$

Homogene koordinate

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

T

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

T^{-1}

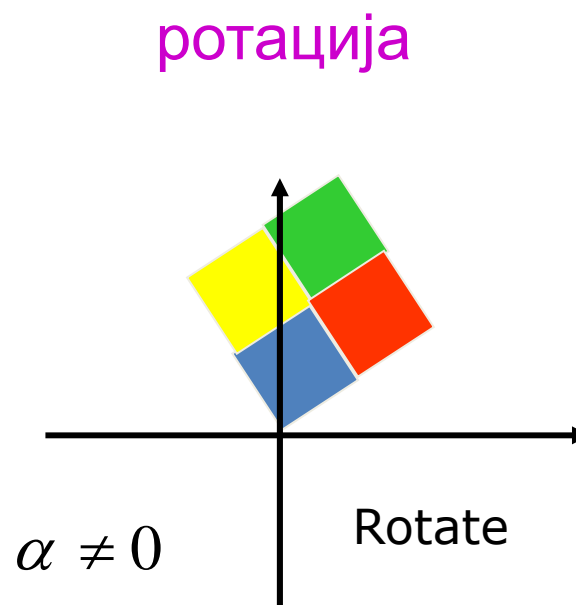
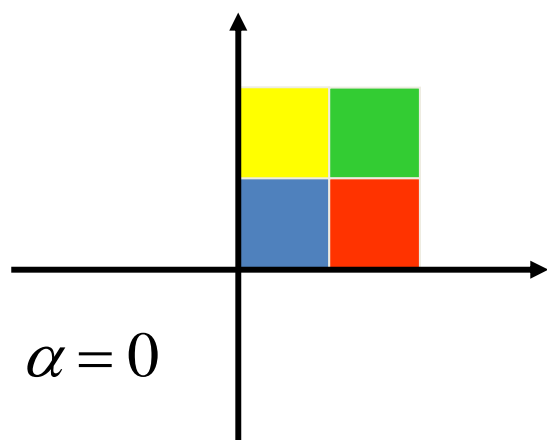
TRANSLACIJA U RAVNI

primer

Napisati matricu translacije za vektor $\vec{t} = (-3, 5)$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ROTACIJA U RAVNI



$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

$$1 = 1$$

ROTACIJA U RAVNI

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

$$1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

\nearrow R \nearrow R^{-1}

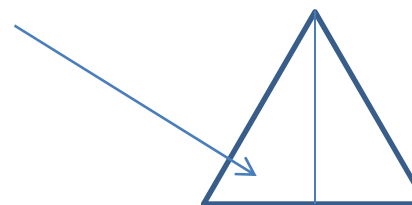
$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = R^T$$

ROTACIJA U RAVNI - primer

Napisati matricu rotacije za ugao

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$




$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$


$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ROTACIJA U RAVNI - primer

Napisati matricu rotacije za ugao $\frac{\pi}{4} = 45^0$ i matricu inverzne transformacije

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


Rotacija za 45^0

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


Rotacija za -45^0

TRANSLACIJA U PROSTORU

Translacija u prostoru je slična translaciji u ravni. Koordinatama tačke dodaju se koordinate vektora translacije $\vec{t} = (p, q, r)$.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 & -q \\ 0 & 0 & 1 & -r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + p$$

$$y' = y + q$$

$$z' = z + r$$

$$1 = 1$$

T

T^{-1}

$$x = x' - p$$

$$y = y' - q$$

$$z = z' - r$$

$$1 = 1$$

TRANSLACIJA U PROSTORU - primer

Napisati matricu translacije za vektor $\vec{t} = (-5, 3, 2)$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

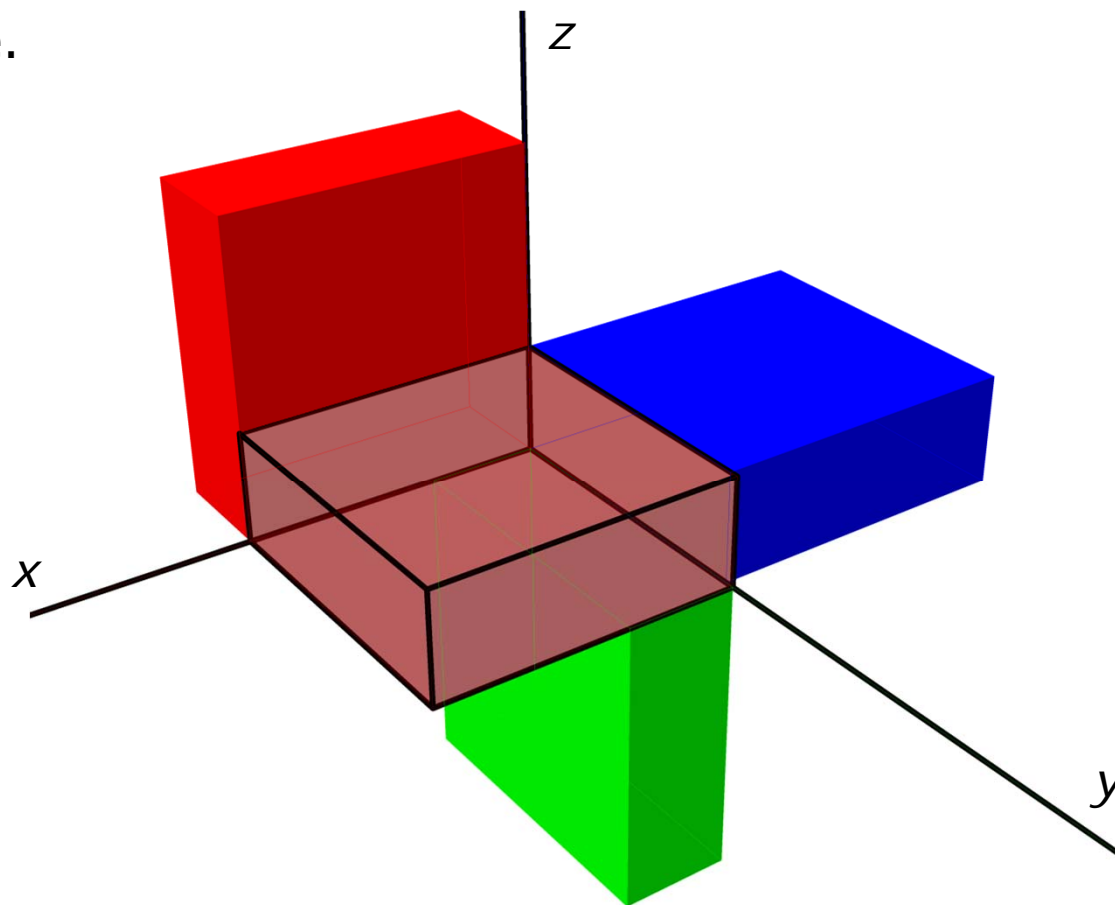
ROTACIJA U PROSTORU

Rotacija u prostoru je složenija zato što imamo rotaciju oko x -ose, y -ose i z -ose.

Rotacija oko

x -ose, y -ose i z -ose

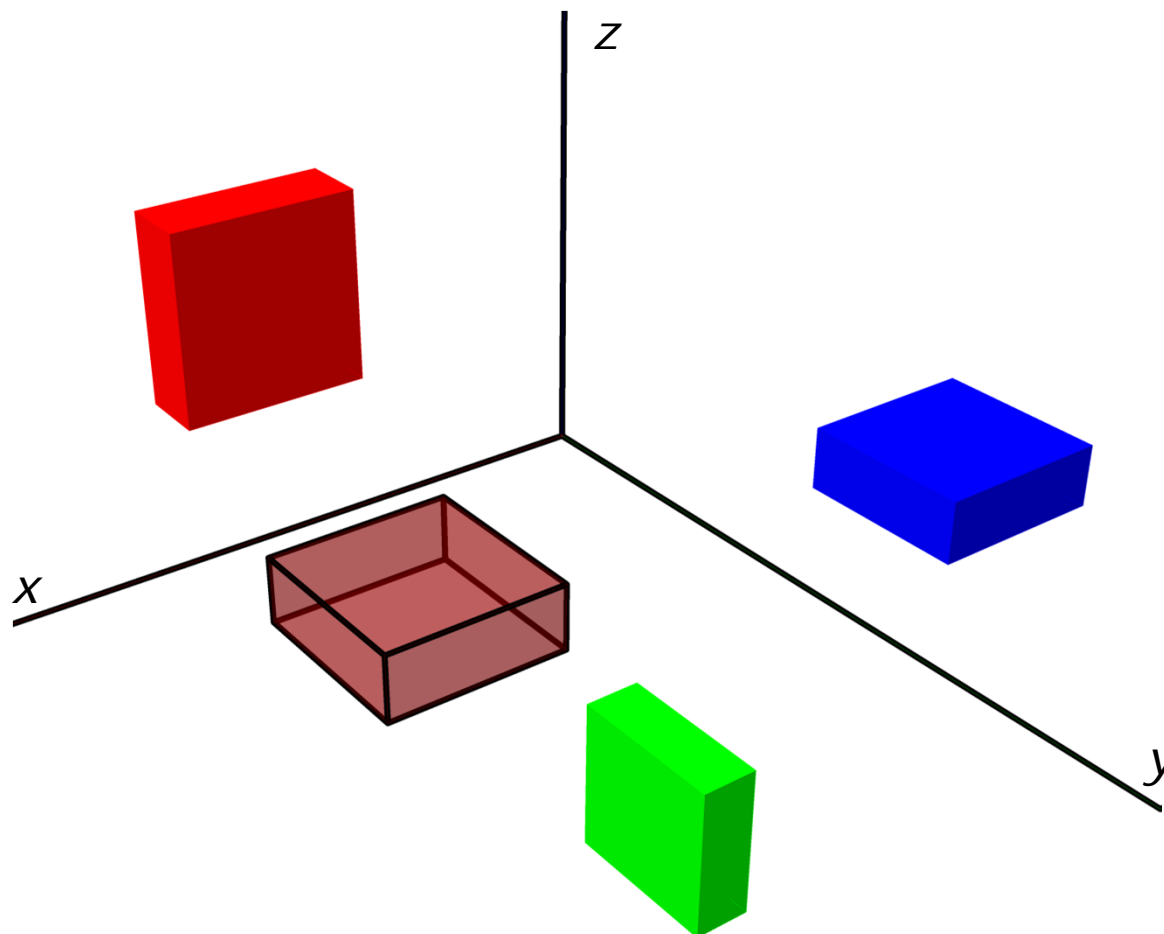
za ugao $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^{\circ}$



ROTACIJA U PROSTORU

Rotacija oko x -ose,
 y -ose i z -ose za
ugao

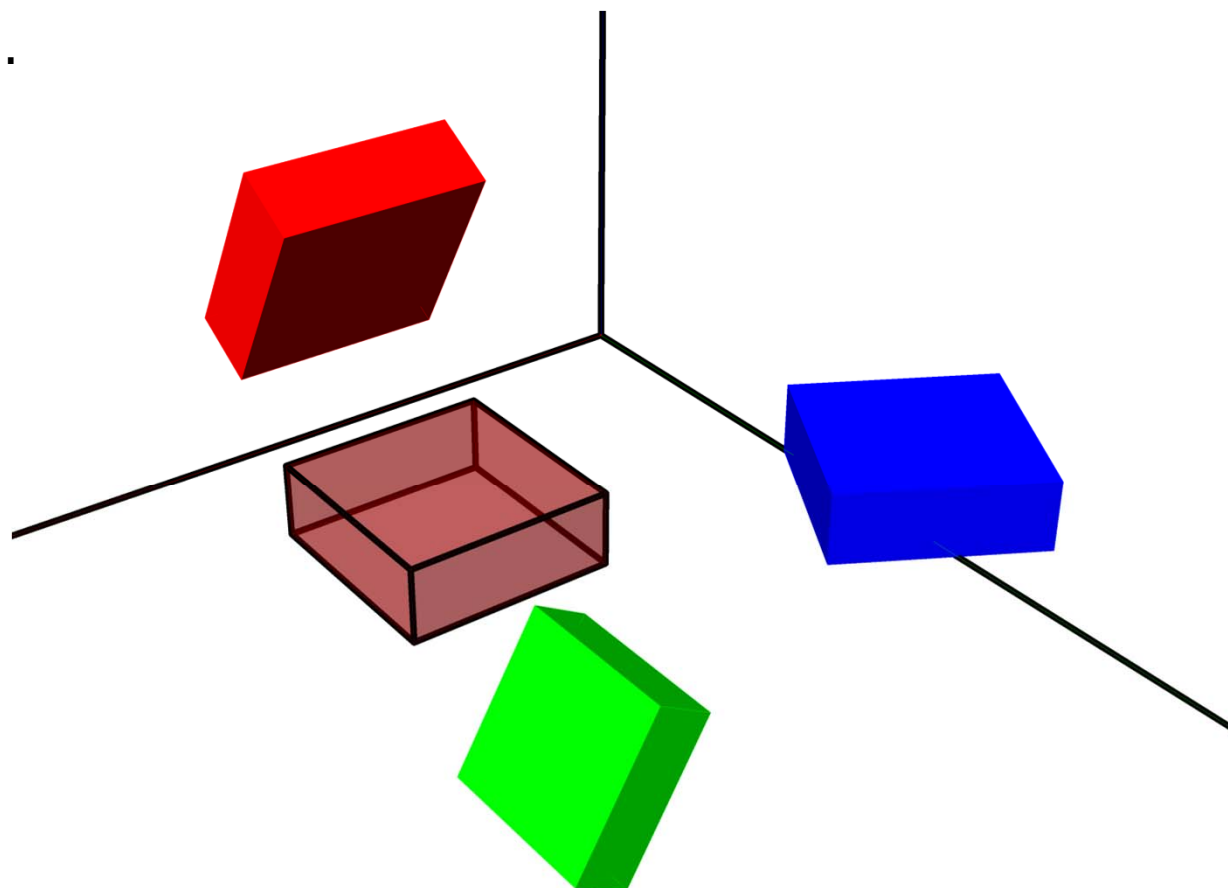
$$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^{\circ}$$



ROTACIJA U PROSTORU

Rotacija oko x -ose,
 y -ose i z -ose za
ugao

$$\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$



ROTACIJA U PROSTORU

Rotacijom oko z-ose menjaju se samo x i y koordinate, z -koordinata se ne menja. Preciznije, z se ne menja, a x i y koordinate se ponašaju kao u rotaciji u xy -ravni.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

R

R^{-1}

ROTACIJA U PROSTORU

Rotacija oko z-ose

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

$$z' = z$$

$$1 = 1$$

$$x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha$$

$$y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

$$z = z'$$

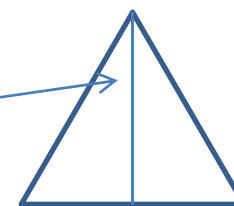
$$1 = 1$$

ROTACIJA U PROSTORU - primer

Napisati matricu rotacije oko z-ose za ugao $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$



$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

ROTACIJA U PROSTORU - primer

Napisati matricu rotacije oko z-ose za ugao $\alpha = -\frac{\pi}{6}$

$$R_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_{\alpha}^{-1}$$

ROTACIJA U PROSTORU - primer

Napisati matricu rotacije oko z-ose za ugao $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ROTACIJA U PROSTORU

Rotacija oko x -ose

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a & 0 \\ 0 & \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

\swarrow R R^{-1} \searrow

$$x' = x$$

$$y' = y \cos \alpha - z \sin \alpha$$

$$z' = y \sin \alpha + z \cos \alpha$$

$$1 = 1$$

$$x = x'$$

$$y = y' \cos \alpha + z' \sin \alpha$$

$$z = -y' \sin \alpha + z' \cos \alpha$$

$$1 = 1$$

ROTACIJA U PROSTORU - primer

Napisati matricu rotacije oko x-ose za ugao $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ROTACIJA U PROSTORU

Rotacija oko y -ose

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & 0 & \sin a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin a & 0 & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x \cos \alpha + z \sin \alpha$$

$$y' = y$$

$$z' = -x \sin \alpha + z \cos \alpha$$

$$1 = 1$$

Objasniti razliku
U odnosu na
ostale ose

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & 0 & -\sin a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin a & 0 & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = x' \cos \alpha - z' \sin \alpha$$

$$y = y'$$

$$z = x' \sin \alpha + z' \cos \alpha$$

$$1 = 1$$

ROTACIJA U PROSTORU - primer

Napisati matricu rotacije oko y-ose za ugao $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

REFLEKSIJA

U odnosu na xy -ravan

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$z' = -z$$

$$1 = 1$$

$R \quad R^{-1}$

$$x = x'$$

$$y = y'$$

$$z = -z'$$

$$1 = 1$$

REFLEKSIJA

U odnosu na xz -ravan

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x$$

$$y' = -y$$

$$z' = z$$

$$1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = x'$$

$$y = -y'$$

$$z = z'$$

$$1 = 1$$

REFLEKSIJA

U odnosu na yz -ravan

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = -x$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = -x'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$1 = 1$$

AFINE TRANSFORMACIJE

Translacija

Rotacija

Refleksija

Skaliranje

Smicanje

Kompozicija navedenih osnovnih afinih transformacija, u proizvoljnom poretku ili kompozicija nekih od njih je afina transformacija.

SKALIRANJE

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

p, q, r

- faktori skaliranja

p - u pravcu x-ose

q - u pravcu y-ose

r - u pravcu z-ose

$$x' = px$$

$$y' = qy$$

$$z' = rz$$

$$1 = 1$$

$$x = \frac{1}{p} x'$$

$$y = \frac{1}{q} y'$$

$$z = \frac{1}{r} z'$$

$$1 = 1$$

SKALIRANJE

$$p = q = r$$

Uniformno skaliranje

Homotetija
Sličnost

$$p = 0.25$$

$$x' = px$$

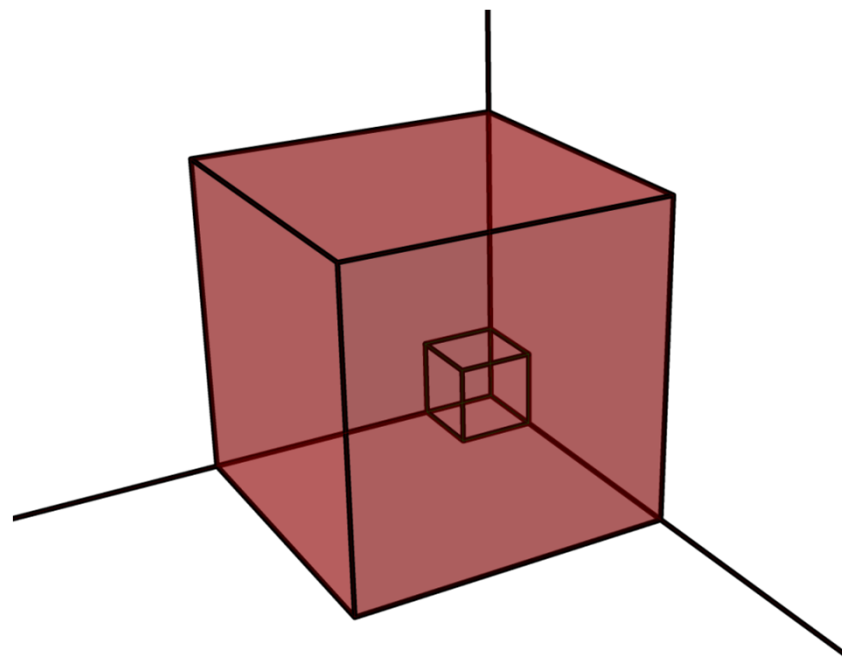
$$q = 0.25$$

$$y' = qy$$

$$r = 0.25$$

$$z' = rz$$

$$1 = 1$$



SKALIRANJE

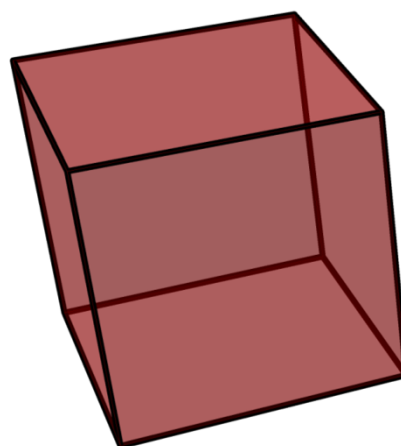
Uniformno skaliranje

$$p = 0.5 \quad x' = px$$

$$q = 0.5 \quad y' = qy$$

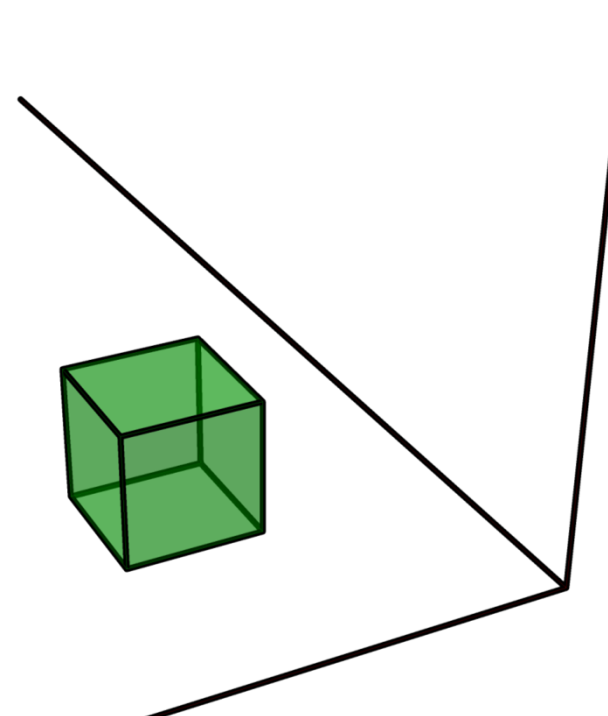
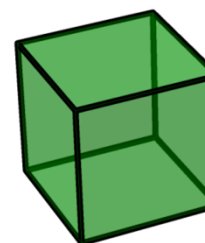
$$r = 0.5 \quad z' = rz$$

$$1 = 1$$



Homotetija

Sličnost

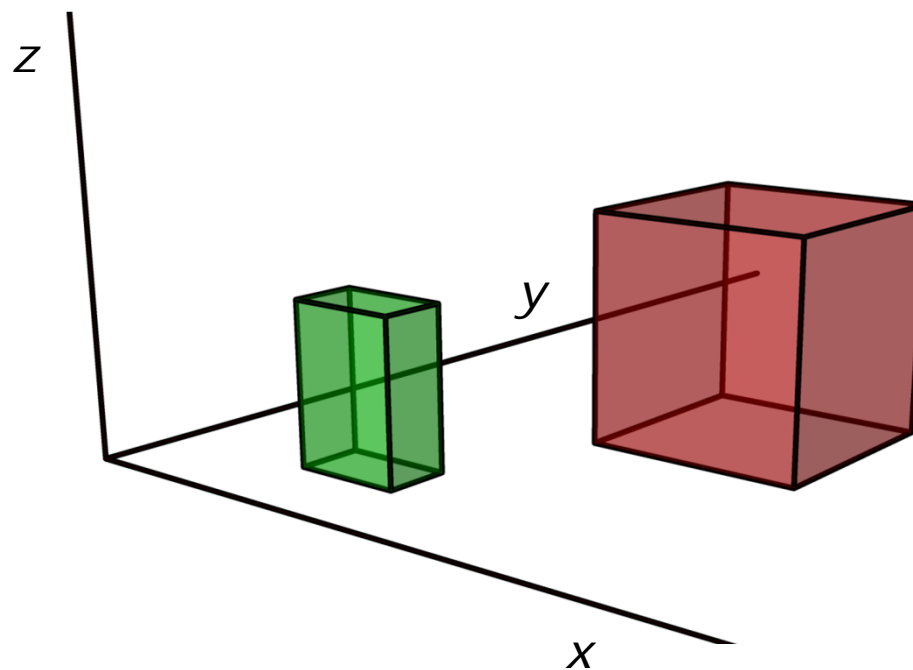


SKALIRANJE

Ukoliko faktori skaliranja po svim osama p, q, r nisu svi međusobno jednaki, skaliranje je neuniformno.

Neuniformno skaliranje

$$\begin{array}{ll} p = 0.5 & x' = px \\ q = 0.3 & y' = qy \\ r = 0.7 & z' = rz \\ & 1 = 1 \end{array}$$



SKALIRANJE

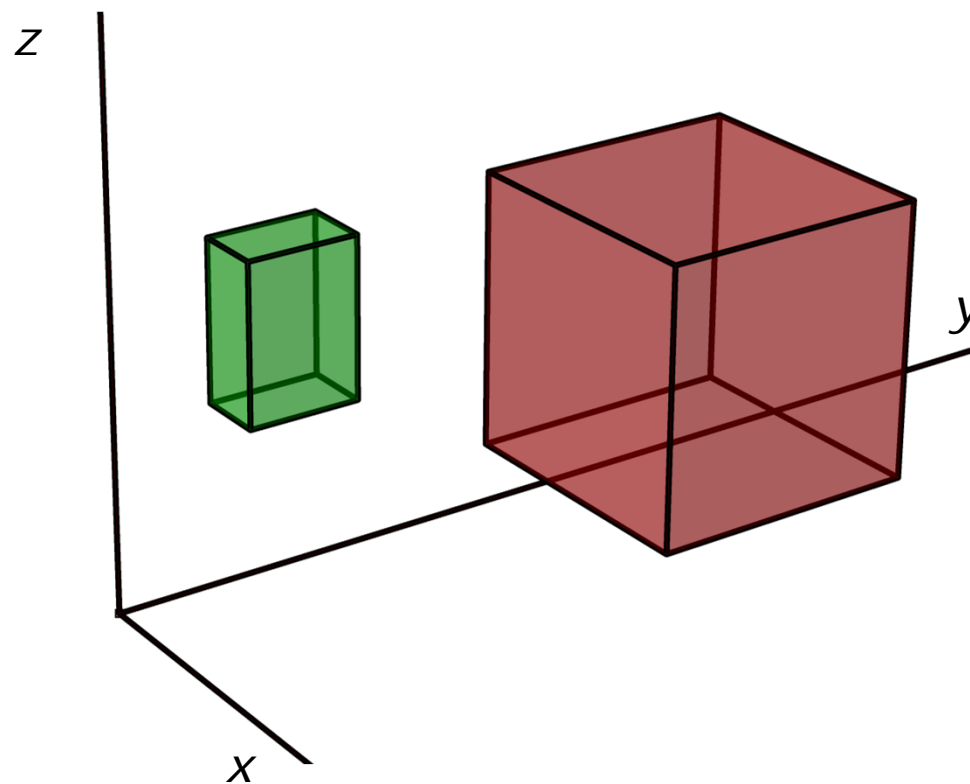
Neuniformno skaliranje

$$p = 0.5 \quad x' = px$$

$$q = 0.3 \quad y' = qy$$

$$r = 0.7 \quad z' = rz$$

$$1 = 1$$



SKALIRANJE

Napisati matricu uniformnog skaliranja sa faktorom skaliranja 0.7 .

$$S = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SKALIRANJE

Napisati matricu skaliranja u pravcu x-ose sa faktorom skaliranja 0.5.

$$S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SKALIRANJE

Napisati matricu skaliranja u pravcu x-ose i pravcu y-ose sa faktorima skaliranja 0.6 i 0.8 rspektivno.

$$S = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1.67 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SKALIRANJE

Napisati matricu neuniformnog skaliranja sa faktorom skaliranja u odnosu na x-osu 0.7, u odnosu na y-osu 0.9, u odnosu na z-osu 0.6.

$$S = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SMICANJE - Shear

U pravcu x- i y-ose

z-koordinata se ne menja

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + az$$

$$y' = y + bz$$

$$z' = z$$

$$1 = 1$$

$$x = x' - az$$

$$y = y' - bz$$

$$z = z'$$

$$1 = 1$$

SMICANJE - Shear

$$a \neq 0, \quad b = 0$$

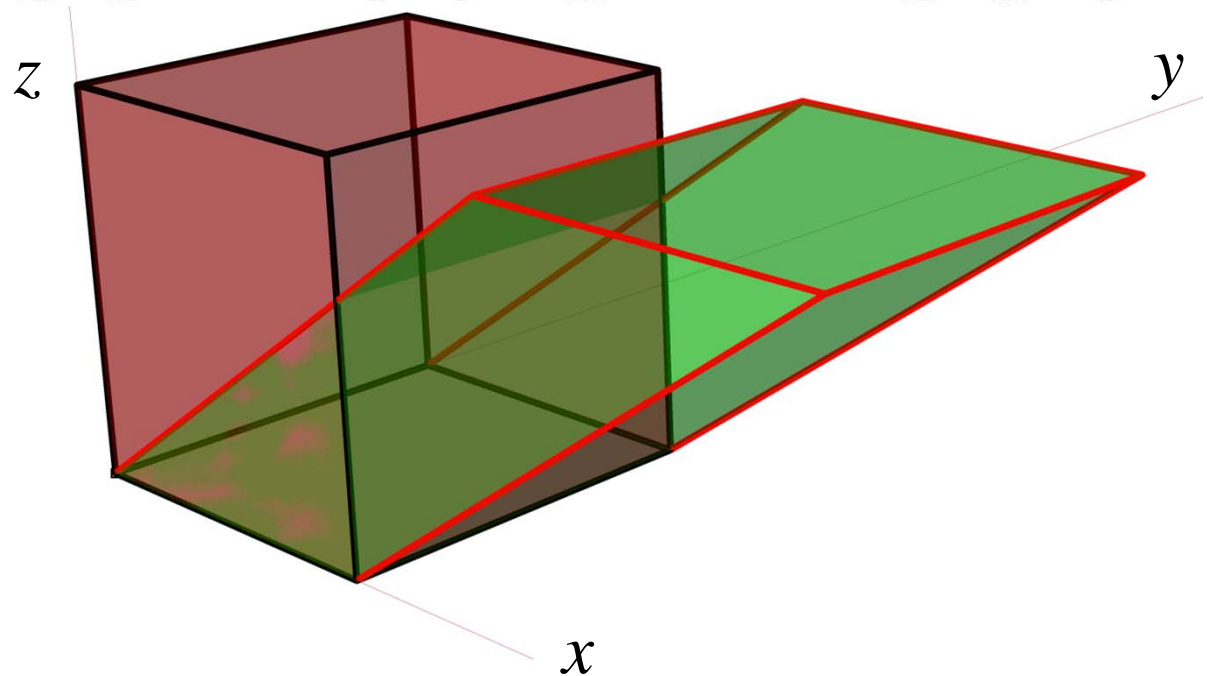
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + az$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$1 = 1$$



SMICANJE - Shear

$$a = 0, \quad b \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

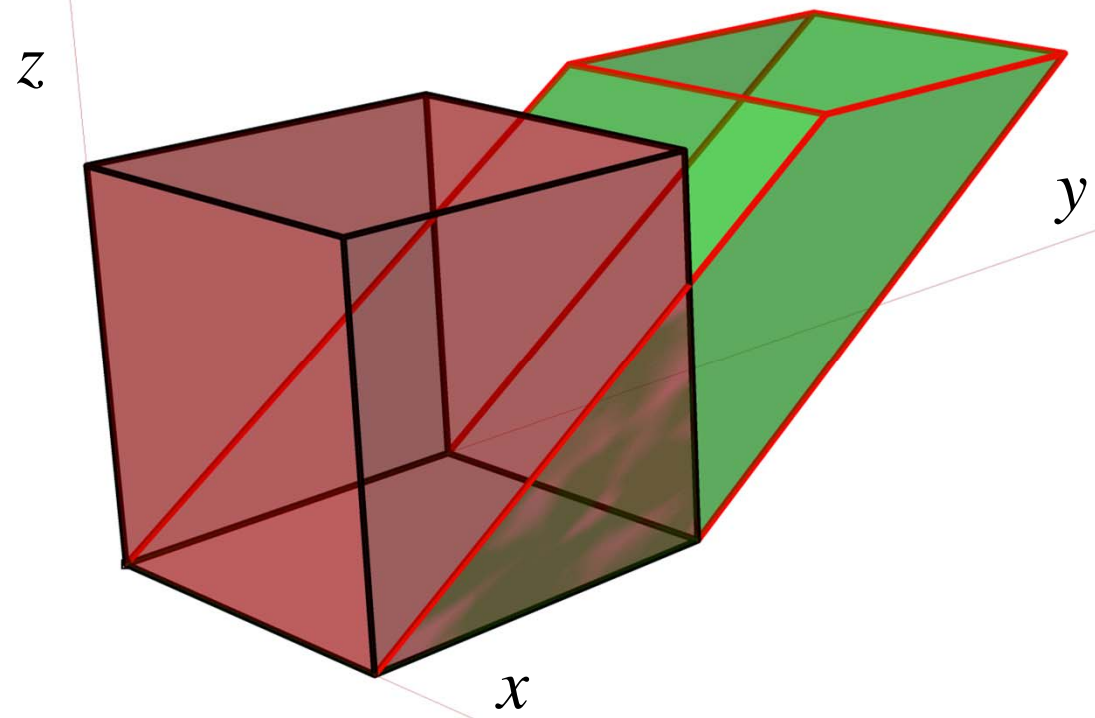
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x$$

$$y' = y + bz$$

$$z' = z$$

$$1 = 1$$



SMICANJE - Shear

$$a \neq 0, \quad b \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

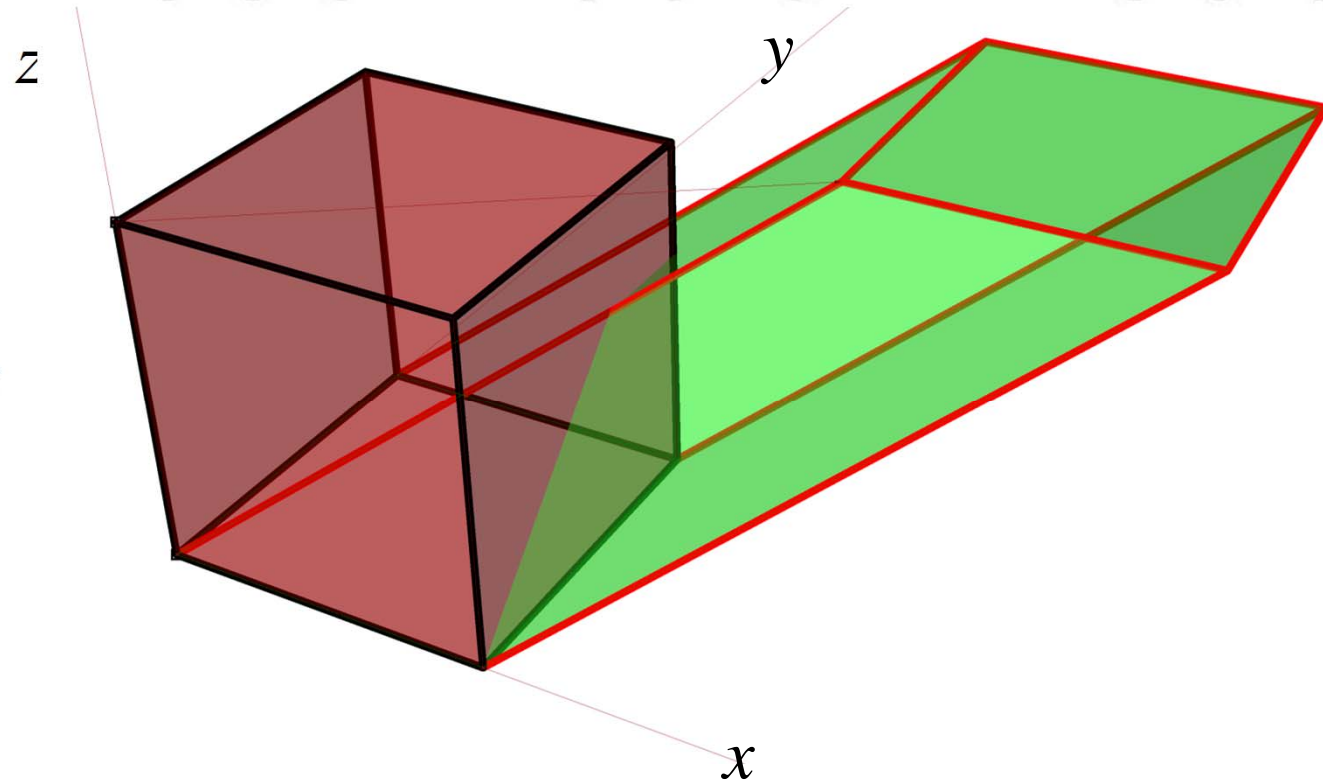
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + az$$

$$y' = y + bz$$

$$z' = z$$

$$1 = 1$$



SMICANJE - Shear

$$a \neq 0, \quad b \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

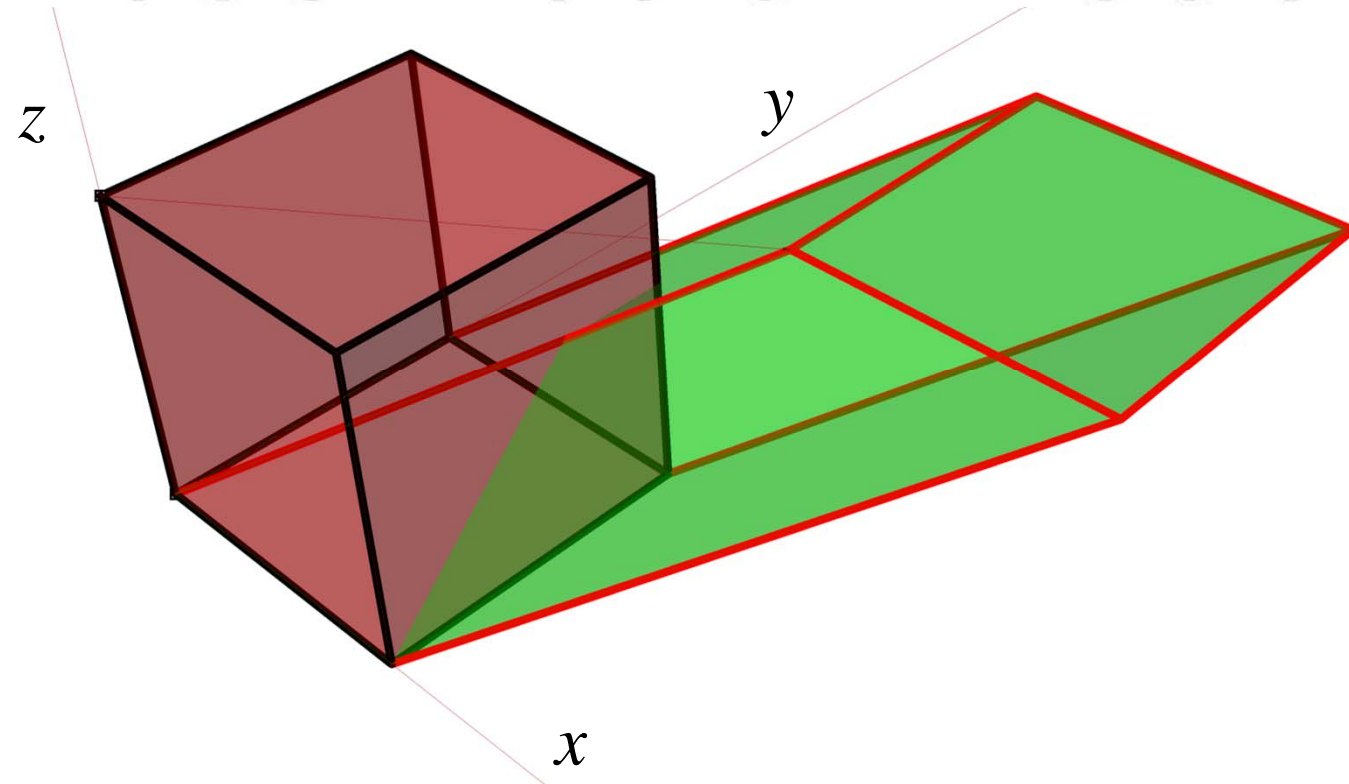
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + az$$

$$y' = y + bz$$

$$z' = z$$

$$1 = 1$$



SMICANJE - primer

Napisati matricu smicanja u x- i y- pravcu sa faktorom smicanja 3 i 4 respektivno.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SMICANJE - Shear

U pravcu x- i z-ose

y-koordinata se ne menja

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + ay$$

$$x = x' - ay$$

$$y' = y$$

$$y = y'$$

$$z' = z + cy$$

$$z = z' - cy$$

$$1 = 1$$

$$1 = 1$$

SMICANJE - primer

Napisati matricu smicanja u x- i z- pravcu sa faktorom smicanja 3 i 4 respektivno.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SMICANJE - Shear

U pravcu y- i z-ose

x-koordinata se ne menja

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x$$

$$x = x'$$

$$y' = y + bx$$

$$y = y' - bx$$

$$z' = z + cx$$

$$z = z' - cx$$

$$1 = 1$$

$$1 = 1$$

SMICANJE - primer

Napisati matricu smicanja u y- i z- pravcu sa faktorom smicanja 3 i 4 respektivno.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SMICANJE – u ravni

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + ay \quad x = x' - ay$$

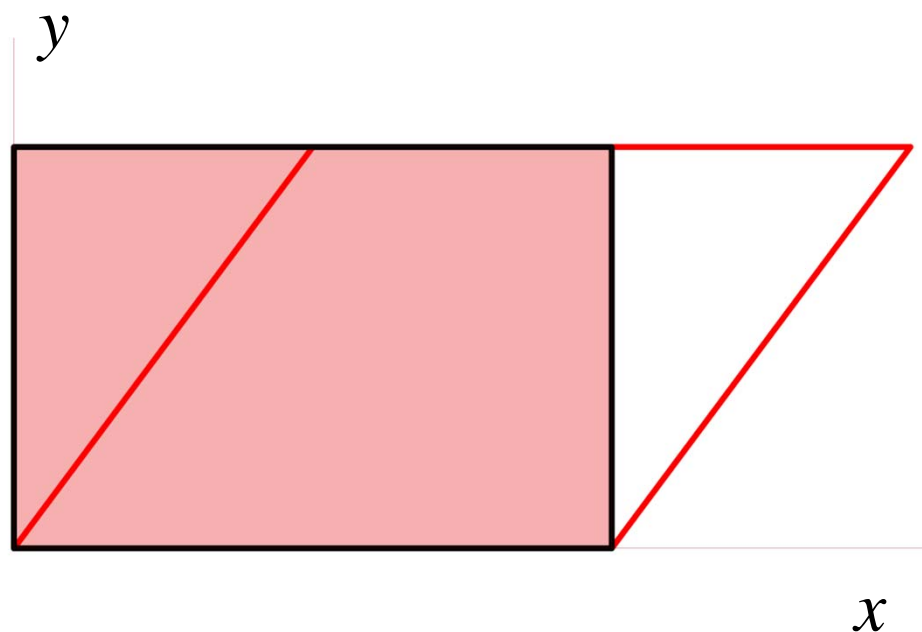
$$y' = y \quad y = y'$$

$$1 = 1 \quad 1 = 1$$

U pravcu x-ose

y-koordinata se ne menja

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$



SMICANJE - primer

Napisati matricu smicanja u ravni u pravcu x-ose sa faktorom smicanja 2.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SMICANJE – u ravni

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x$$

$$y' = y + bx$$

$$1 = 1$$

$$x = x'$$

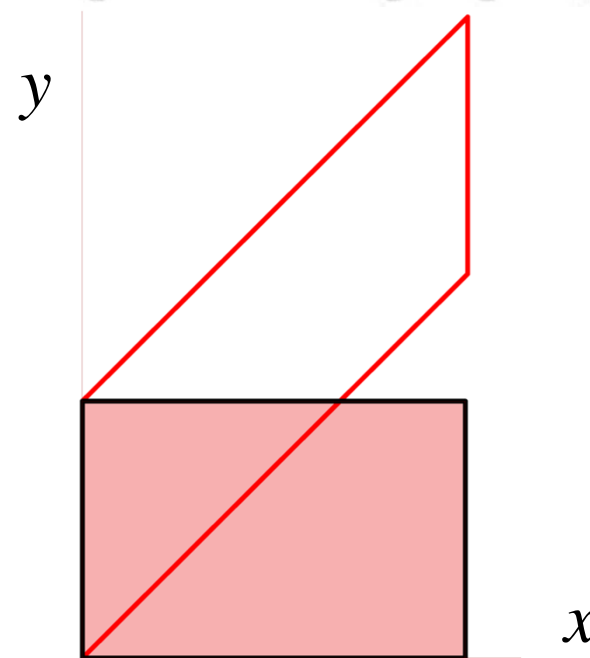
$$y = y' - bx$$

$$1 = 1$$

U pravcu y-ose

x-koordinata se ne menja

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$



SMICANJE - primer

Napisati matricu smicanja u ravni u pravcu y-ose sa faktorom smicanja 2.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AFINE TRANSFORMACIJE

Kompozicija geometrijskih transformacija je njihovo uzastopno izvođenje, svaka od transformacija djeluje na rezultat prethodne.

Ako su zadane matrice transformacija

$$A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n$$

matrica kompozicije, izvođenja transformacija u tom poretku je

$$A = A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1$$

AFINE TRANSFORMACIJE

U opštem slučaju, affine transformacije se mogu prikazati u obliku:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Opšti oblik matrice affine transformacije

Inverzna matrica –

Matrica inverzne transformacije

AFINE TRANSFORMACIJE

Afine transformacije u ravni održavaju kolinearnost i odnose rastojanja između tačaka.

Afine transformacije u prostoru održavaju komplanarnost, kolinearnost i odnose rastojanja između tačaka.

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

Primenjene su sledeće transformacija na neki objekat:

1. Skaliranje u pravcu x-ose koristeći faktor skaliranja 5
2. Potom, rotacija oko z-ose za 30° .
3. Zatim, smicanje u x- i y- pravcu sa faktorom smicanja 2 i 3 respektivno.
4. Na kraju, translacija za vektor (2,1,2).

Ukoliko su matrice skaliranja, rotacije, smicanja i translacije

A, B, C i D respektivno, matrica njihove kompozicije je $H=DCBA$.

$$H = DCBA \quad H^{-1} = (DCBA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}C^{-1}D^{-1}$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

$$\mathbf{H} = \mathbf{DCBA} = \begin{bmatrix} 5\sqrt{3}/2 & -1/2 & 2 & 2 \\ 5/2 & \sqrt{3}/2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

Primenjene su sledeće transformacija na neku geometrijsku figuru u ravni:

1. Rotacija za ugao $\frac{\pi}{4}$

2. Potom, translacija za vektor $\vec{t} = (2, 3)$

- 1) Napisati matrice rotacije i translacije
- 2) Izračunati matricu izvedene afine transformacije (kompozicije rotacije i translacije).
- 3) Izračunati matricu afine transformacije u slučaju da su rotacija i translacija izvedene u obrnutom poretku.

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

$$1) \quad R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2) \quad K = T \cdot R$$

$$K = TR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

$$3) \quad R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L = R \cdot T$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

$$L = RT = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = RT = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

$$K = TR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$L = RT = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T \cdot R \neq R \cdot T$$

Kompozicija rotacije i translacije nije komutativna.

Bitan je redosled izvodjenja tih transformacija.

Primenjene su sledeće transformacija na neku geometrijsku figuru u ravni:

1. Skaliranje sa faktorom 0.8

2. Potom, translacije za vektor $\vec{t} = (2, 3)$

1) Napisati matrice skaliranja i translacije.

2) Izračunati matricu izvedene affine transformacije (kompozicije skaliranja i translacije).

3) Izračunati matricu affine transformacije u slučaju da su transformacije izvedene u obrnutom poretku.

$$S = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T \cdot S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 2 \\ 0 & 0.8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S \cdot T = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0.8 \cdot 2 \\ 0 & 0.8 & 0.8 \cdot 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 1.6 \\ 0 & 0.8 & 2.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T \cdot S = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 2 \\ 0 & 0.8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S \cdot T = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 1.6 \\ 0 & 0.8 & 2.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T \cdot S \neq S \cdot T$$

Kompozicija skaliranja i translacije nije komutativna.

Bitan je redosled izvodjenja tih transformacija.

Primenjene su sledeće transformacija na neku geometrijsku figuru u ravni:

1. Skaliranje sa faktorom 0.8

2. Potom, rotacija za ugao $\frac{\pi}{4}$

1) Napisati matrice skaliranja i rotacije.

2) Izračunati matricu izvedene affine transformacije (kompozicije skaliranja i rotacije).

3) Izračunati matricu affine transformacije u slučaju da su transformacije izvedene u obrnutom poretku.

Primenjene su sledeće transformacija na neku geometrijsku figuru u ravni:

1. Skaliranje sa faktorom 0.8

2. Potom, rotacija za ugao $\frac{\pi}{4}$

1) Napisati matrice skaliranja i rotacije.

2) Izračunati matricu izvedene affine transformacije (kompozicije skaliranja i rotacije).

3) Izračunati matricu affine transformacije u slučaju da su transformacije izvedene u obrnutom poretku.

Primenjene su sledeće transformacija na neku geometrijsku figuru u ravni:

1. Skaliranje sa faktorom 0.8

2. Potom, rotacija za ugao $\frac{\pi}{4}$

1) Napisati matrice skaliranja i rotacije.

2) Izračunati matricu izvedene affine transformacije (kompozicije skaliranja i rotacije).

3) Izračunati matricu affine transformacije u slučaju da su transformacije izvedene u obrnutom poretku.

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R \cdot S = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & -0.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & 0.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S \cdot R = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & -0.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & 0.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R \cdot S = S \cdot R$$

Medjutim, iz pojedinačnog primera, ne može se izvesti zaključak.

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R \cdot S = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \cos \alpha & -q \sin \alpha & 0 \\ p \sin \alpha & q \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R \cdot S = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \cos \alpha & -q \sin \alpha & 0 \\ p \sin \alpha & q \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S \cdot R = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \cos \alpha & -p \sin \alpha & 0 \\ q \sin \alpha & q \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

U slučaju uniformnog skaliranja $q = p$

$$R \cdot S = S \cdot R = \begin{bmatrix} p \cos \alpha & -p \sin \alpha & 0 \\ p \sin \alpha & p \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R \cdot S = S \cdot R$$

U slučaju uniformnog skaliranja kompozicija skaliranja i rotacije je komutativna.

Nije bitan redosled izvodjenja transformacija.

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

Napisati matricu složene afine transformacije u prostoru u kojoj rotaciji oko x-ose za ugao α prethodi rotacija oko z-ose za isti taj ugao.

$$R_z \quad R = R_x \cdot R_z$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

$$R = R_x R_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

Primenjene su sledeće transformacija na neki objekat:

1. Uniformno skaliranje sa faktorom skaliranja 0.5

2. Potom, translacija za vektor $(2,1,2)$.

1) Izračunati matricu afine transformacije, ukoliko se skaliranje i translacija izvode u tom poretku.

2) Izračunati matricu afine transformacije, ukoliko se skaliranje i translacija izvode u suprotnom poretku.

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

$$1) \quad S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = TS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

2)

$$S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = ST = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

Primenjene su sledeće transformacija na neku geometrijsku figuru u ravni:

1. Skaliranje u pravcu y-ose koristeći faktor skaliranja 0.2
2. Potom, translacija za vektor (2,3)
3. Na kraju, smicanje u pravcu x-ose sa faktorom smicanja 2 .

1) Izračunati matricu afine transformacije, ukoliko se skaliranje , translacija i smicanje izvode u tom poretku.

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

$$H = CBA$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = CBA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = CBA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0.2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primenjene su sledeće transformacija na neku geometrijsku figuru u ravni:

1. Skaliranje sa faktorom 0.5

2. Potom, translacije za vektor $\vec{t} = (2, 3)$

1) Napisati matrice skaliranja i translacije.

2) Izračunati matricu izvedene affine transformacije (kompozicije skaliranja i translacije u tom poretku).

3) Izračunati matricu inverzne affine transformacije

$$S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = T \cdot S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 2 \\ 0 & 0.5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = (T \cdot S)^{-1} = S^{-1}T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primenjene su sledeće transformacija na neku geometrijsku figuru u ravni:

1. Skaliranje sa faktorom 0.2

2. Potom, rotacija za ugao $\frac{\pi}{2}$

1) Napisati matrice skaliranja i rotacije.

2) Izračunati matricu izvedene affine transformacije (kompozicije skaliranja i rotacije).

3) Izračunati inverznu matricu.

$$S = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = R \cdot S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = (R \cdot S)^{-1} = S^{-1}R^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TRANSFORMACIJA KOORDINATNOG SISTEMA

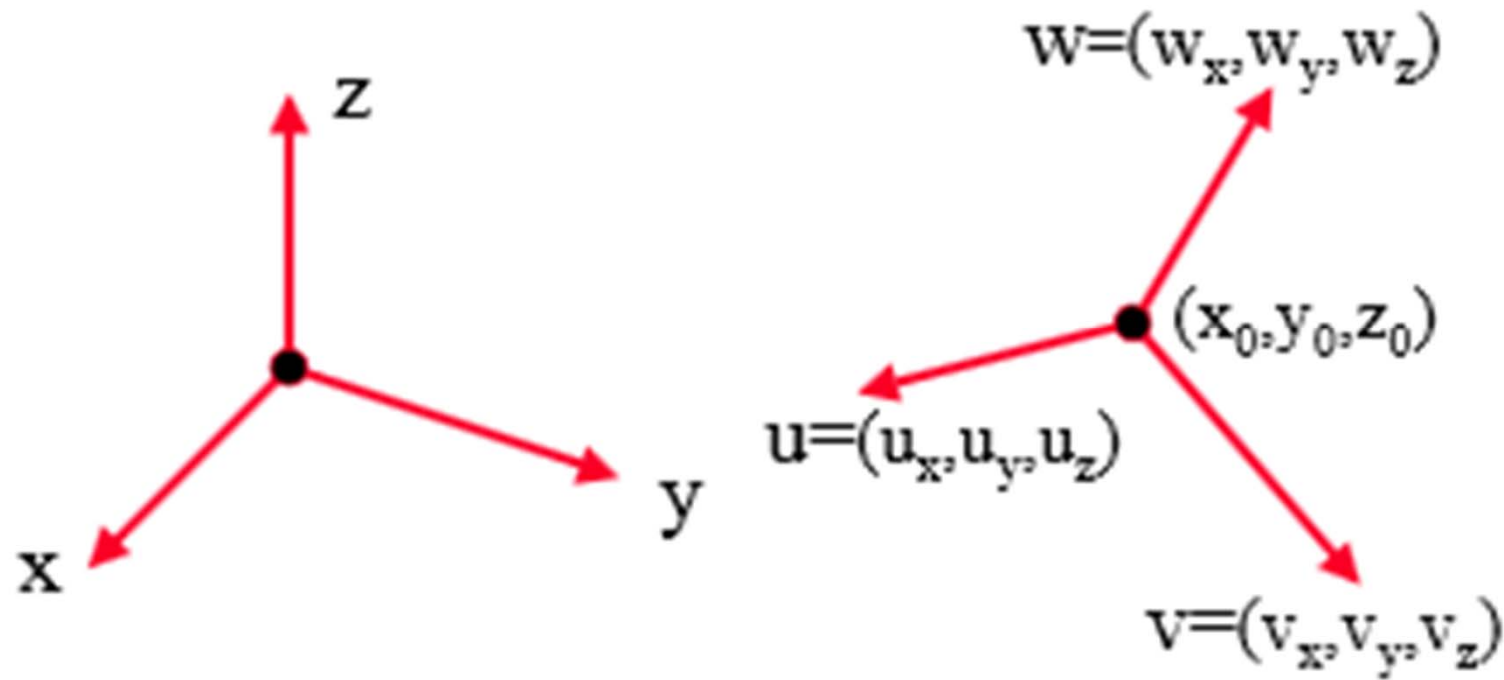
Opšti oblik afine transformacije:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

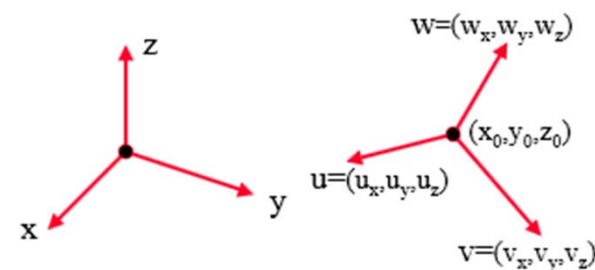
Matrica afine transformacije.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TRANSFORMACIJA KOORDINATNOG SISTEMA



TRANSFORMACIJA KOORDINATNOG SISTEMA



$$M = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

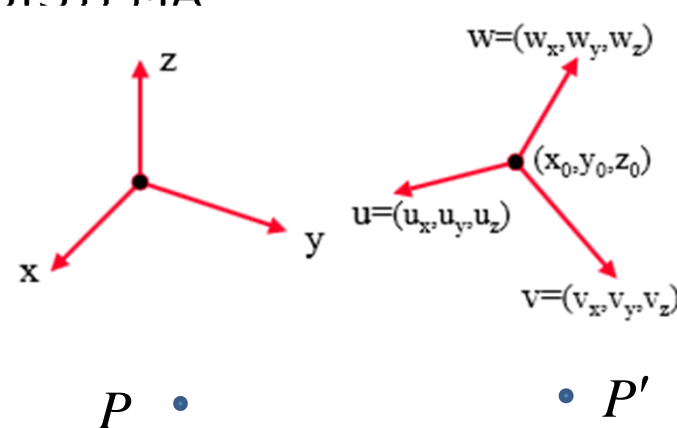
$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

TRANSFORMACIJA KOORDINATNOG SISTEMA

$$M = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



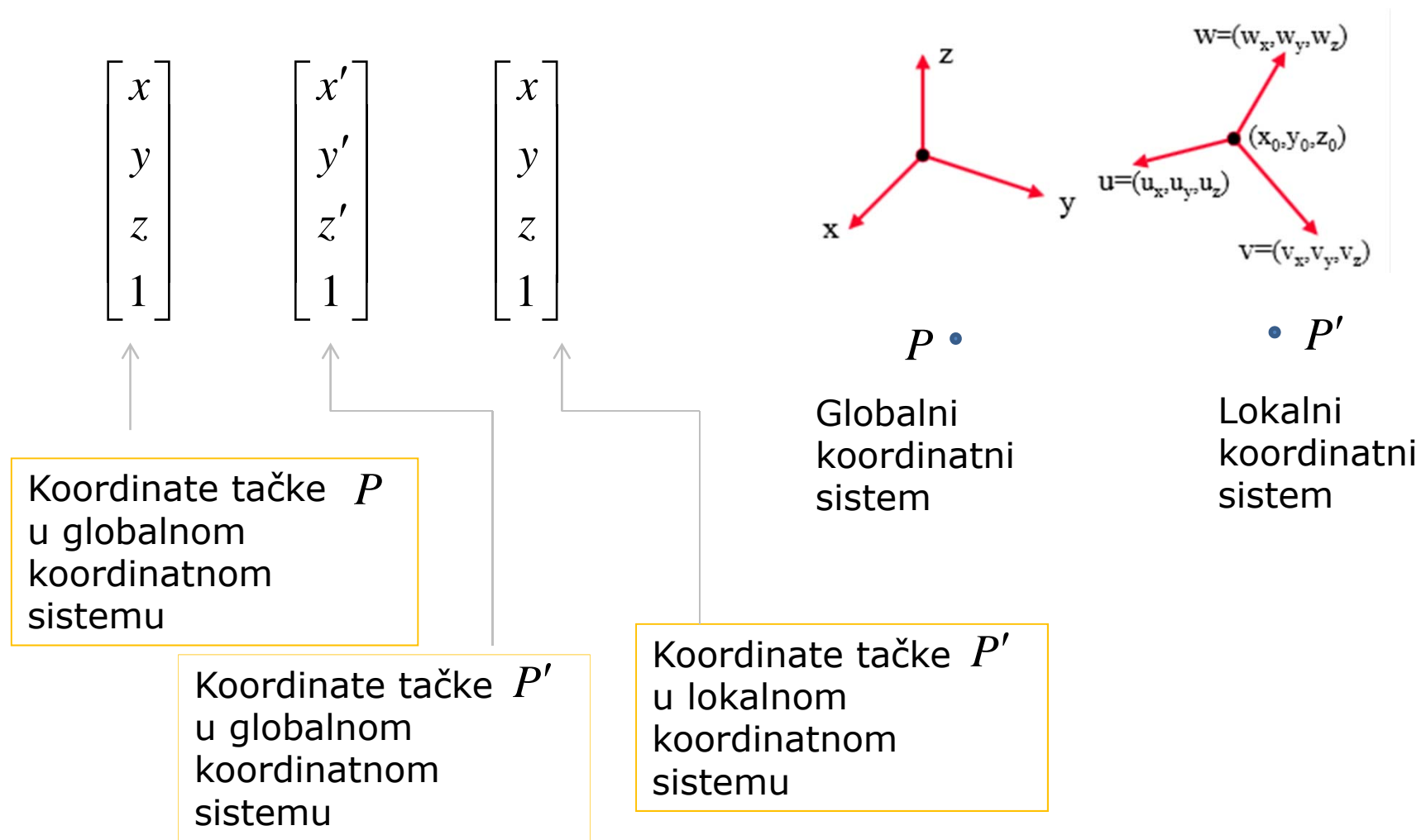
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Koordinate tačke P
u xyz -koordinatnom
sistemu

Koordinate tačke P'
u xyz -koordinatnom
sistemu

Koordinate tačke P'
u uvw -koordinatnom
sistemu

TRANSFORMACIJA KOORDINATNOG SISTEMA



TRANSFORMACIJA KOORDINATNOG SISTEMA

