Zadaci iz Primena projektivne geometrije u računarstvu (Geometrijske vizuelizacije)

- za rad na vežbama -

novembar 2018.

1 Kretanja prostora

1. Napisati matricu rotacije za $\phi = \frac{10\pi}{6}$ oko a) Ox ose; b) Oy ose; c) Oz ose.

2. i) Napisati kompoziciju, tim redom, rotacije oko Oz ose za $\psi = \frac{3\pi}{2}$ i rotacije oko Ox ose za $\phi = \frac{\pi}{2}$ kao a) svetskih rotacija; b) sopstvenih rotacija.

   ii) Napisati kompoziciju, tim redom, rotacije oko Oy ose za $\frac{\pi}{2}$ i rotacije oko Ox ose za $\phi = \pi$ kao a) svetskih rotacija; b) sopstvenih rotacija.

   U svim slučajevima nacrtati početni reper i krajnji reper.

3. Rodrigezovom formulom izvesti matrice rotacija oko koordinatnih osa.

4. (radjeno na predavanjima) Prava p ima vektor pravca $\overrightarrow{p} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$ (i sadrži koordinatni početak). Odrediti matricu rotacije $\mathcal{R}_p(\frac{2\pi}{3})$. Objasniti!

5. Rodrigezovom formulom odrediti matricu rotacije $\mathcal{R}_p(\phi)$ ako je:

   a) $p = \frac{1}{3}(1,2,2)$, $\phi = \frac{3\pi}{2}$;

   b) $p = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0)$, $\phi = \frac{\pi}{3}$.

6. Za matricu A proveriti da je ortogonalna, determinante jednake 1, a zatim odrediti jedinični vektor p i ugao $\phi \in [0,\pi]$ tako da je $A = R_p(\phi)$:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \ \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \ \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

   (ove matrice su ujedno rešenja prethodna dva zadatka - uporediti).

7. a) Odrediti vektor i ugao (neke) rotacije koja rotira vektor $e_3 = (0,0,1)$ u $f_3 = (\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{1}{2})$. b) Odrediti matricu te rotacije.

8. Odrediti Ojlerove uglove matrica iz Zadatka 6, tj. predstaviti te matrice u obliku $R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$.

9. Odrediti bar dve trojke Ojlerovih uglova matrica (pošto je $a_{31} = \pm 1$ ti uglovi nisu jedinstveni - "gimbal lock"):

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Dati su kvaternioni $q = 2i + 2k + 1$, $q_1 = i - j$. a) Izračunati $q + q_1, qq_1, q_1q, q^{-1}, q_1^{-1}$; b) proveriti $qq_1 = [\overrightarrow{v}, w][\overrightarrow{v_1}, w_1] = [\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v_1} + w\overrightarrow{v_1} + w_1\overrightarrow{v}, ww_1 - \langle\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_1}\rangle]$; c) proveriti $(qq_1)^{-1} = q_1^{-1}q^{-1}$; d) proveriti $\overline{qq_1} = \bar{q}_1\bar{q}$; e) proveriti $|qq_1| = |q||q_1|$.

11. Množeći kvaternione odrediti matricu konjugacije C_q jediničnim kvaternionom $q = \frac{1}{\sqrt{2}}k + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Koju on rotaciju predstavlja?

12. Koju rotaciju predstavlja konjugacija C_q kvaternionom $q = i + 2k + 2$?

13. Odrediti kvaternione koji odgovaraju rotacijama iz Zadataka 3, 4 i 5.

14. Kompozicije rotacija iz Zadatka 2. prestaviti množenjem kvaterniona, a zatim ih predstaviti kao rotacije oko ose.

15. a) Odrediti linearnu interpolaciju izmedju tačaka $C_1(0, 3, 2)$ i $C_2(6, 9, -1)$. b) Odrediti k-ti frejm (4×4 matricu), ako animacija traje 3 sekunde, sa 60 frejmova u sekundi.

16. Odrediti 4×4 matricu k-tog frejma interpolacije izmedju položaja $(C_1(1, 2, 3), Id)$ i položaja $(C_2(3, 3, 5), R_{-y}(-\frac{3\pi}{2})$. Animacija treba da traje 5 sekundi sa 24 frejma u sekundi, a translacija i rotacija se dešavaju istovremeno. Interpolaciju "orjentacije"uraditi a) primenom rotacije oko Oy ose; U ovom slučaju odrediti matricu 80-og frejma; b) primenom funkcija `Slerp(`q_1, q_2, t_m, t`)`, `Q2AngleAxis(`q`)` i `Rodrigez(`p, ϕ`)`.

17. Odrediti 4×4 matricu k-tog frejma interpolacije izmedju položaja $(C_1(0, 0, 5), R_z(\frac{5\pi}{6})$ i položaja $(C_2(3, 4, 5), R_z(\frac{\pi}{2})R_x(\frac{\pi}{2})$. Rotacija i translacija se dešavaju istovremeno i traju 10 sekundi sa 24 frejma u sekundi. Koristiti funkcije `Slerp(`q_1, q_2, t_m, t`)`, `Q2AngleAxis(`q`)` i `Rodrigez(`p, ϕ`)`.

18. (GluLookAt funkcija) a) Date su koordinate pozicije kamere $E(1, 2, 3)$, koordinate centra scene $C(3, 4, -1)$ i koodinate UP vektora $f_2 = (2, -1, 4)$ (on označava pravac "iznad"kamere). Odrediti $4x4$ matricu koja zadaje položaj (poziciju i orjentaciju) kamere.

    Napomena: koordinatni sistem $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$ kamere je kao u OpenGl-u: pozitivne orjentacije i kamera "gleda" duž negativne z ose kamere.

    b) Proveriti da je matrica "orjentacije"A ortogonalna i važi $\det A = 1$.