

Primena projektivne geometrije u računarstvu, 2. deo

Srdjan Vukmirović

Matematički fakultet, Beograd

septembar 2018.

- Neka je M proizvoljna tačka i α_M ravan koja sadrži M i normalna je na p . Neka je $O_M = \alpha_M \cap p$.
- Tačka M' se dobija rotacijom tačke M oko O_M za ugao ϕ , u ravni α_M .
- Smer rotacije: za vektore $\overrightarrow{O_M M}$, $\overrightarrow{O_M M'}$, \vec{p} važi pravilo desne ruke (za $\phi < \pi$ ti vektori čine pozitivno orjentisanu bazu).

U principu, ne moramo se ograničiti na $\phi \leq \pi$, ali možemo, jer važi

$$\mathcal{R}_p(\phi) = \mathcal{R}_{-p}(2\pi - \phi),$$

tj. za $\phi \geq \pi$ rotiramo u odnosu na suprotno orjentisanu pravu.

Važi $\mathcal{R}_p(\pi) = \mathcal{R}_{-p}(-\pi)$ i tada se radi o **refleksiji u odnosu na pravu p** .

Teorema (Formula Rodrigeza)

Matrica rotacije $\mathcal{R}_p(\phi)$, za ugao ϕ oko orjentisane prave p koja sadrži koordinatni početak je:

$$R_p(\phi) = pp^T + \cos \phi (E - pp^T) + \sin \phi p_{\times}, \quad (5)$$

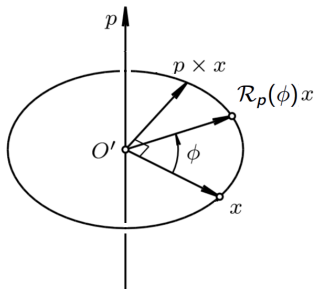
gde je p_{\times} matrica vektorskog množenja **jediničnim** vektorom prave $p = (p_1, p_2, p_3)$:

$$p_{\times} := \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Primer

Prava p ima vektor pravca $\vec{p} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$ (i sadrži koordinatni početak). Odrediti matricu rotacije $\mathcal{R}_p(\frac{2\pi}{3})$. Objasniti!

Dokaz teoreme: Neka je A matrica data sa (5). Dovoljno je dokazati da odgovarajuća transformacija rotira vektor $x \perp p$ za ugao ϕ oko p , a slika vektor p u sebe.



Ako je $x \perp p$, tada je $p^T x = \langle p, x \rangle = 0$, pa imamo

$$Ax = pp^T x + \cos \phi x - \cos \phi pp^T x + \sin \phi p \times x = \cos \phi x + \sin \phi p \times x,$$

što je upravo vektor x zarotiran za ugao ϕ .

Posmatrajmo sada šta se dešava sa vektorom p .

$$Ap = pp^T p + \cos \phi p - \cos \phi pp^T p + \sin \phi p \times p = p,$$

jer je $p^T p = |p|^2 = 1$, $p \times p = 0$.

Dakle $A = R_p(\phi)$.

□

Teorema (I Ojlerova)

Svako kretanje f prostora koje ima fiksnu tačku O je rotacija oko neke orijentisane prave p koja sadrži O , za ugao $\phi \in [0, \pi]$.

Dokaz:

Proizvod sopstvenih vrednosti matrice A tog preslikavanja mora biti jednak $\det A = 1$. Pošto je f izometrija, realne sopstvene vrednosti moraju biti ± 1 , a kompleksne dva konjugovana kompleksna broja modula 1.

Jedna sopstvena vrednost mora biti jednaka 1 i neka je prava p određena odgovarajućim sopstvenim vektorom. Preciznije, sopstvene vrednosti su:

- 1, 1, 1 pa je tada $f = \mathcal{R}_p(0) = Id$ identitet (izbor prave p je nebitan);
- 1, -1, -1, pa je tada $f = \mathcal{R}_p(\pi) = \mathcal{R}_{-p}(\pi)$;
- 1, $\cos \phi \pm i \sin \phi \in \mathbb{C}$, pa je $f = \mathcal{R}_p(\phi)$, pri čemu eventualnom zamenom p sa $-p$ možemo postići $\phi \in (0, \pi)$. □

Primer

Data je matrica

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ 4 & 4 & -7 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Dokazati da je A matrica kretanja.*
- Odrediti jedinični vektor p i ugao ϕ tako da je $A = \mathcal{R}_p(\pi)$.*
- Proveriti rezultat pod b) koristeći formulu Rodrigeza.*

Algoritam **A2AngleAxis**: matrica A kretanja u oblik $\mathcal{R}_p(\pi)$

Ulaz: Ortogonalna matrica $A = (a_{ij}) \neq E$, $\det A = 1$.

Izlaz: Jedinični vektor p i ugao $\phi \in [0, \pi]$ takav da $A = R_p(\phi)$.

Algoritam:

odrediti jedinični sopstveni vektor p za $\lambda = 1$;

odrediti proizvoljan jedinični vektor $u \perp p$;

$u' = Au$; // u' je jedinični;

$\phi = \arccos(u, u') = \langle u, u' \rangle$;

if $[u, u', p] < 0$ { // $[\cdot, \cdot, \cdot]$ je mešoviti proizvod

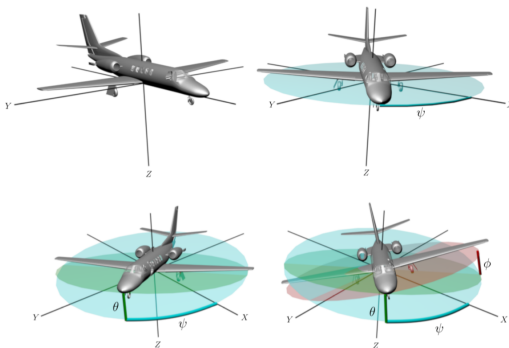
$p = -p$; // da bi rotacija bila u pozitivnom smeru

}



Slika: Leonard Ojler (1707-1783), švajcarski matematičar i fizičar

Ojlerovi (Tejt-Brajanovi) uglovi



Slika: Sopstvene rotacije: skretanje-*yaw*, propinjanje-*pitch*, valjanje-*roll*
Sopstvene rotacije su rotacije u odnosu na ose pokretnog koordinatnog sistema koji je vezan za telo. Uglovi ψ, θ, ϕ za koje rotiramo zovu se **Ojlerovi uglovi**: $\psi, \phi \in [0, 2\pi), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Mi uzimamo rotacije oko sopstvenih osa Oz, Oy_1, Ox_2 , tim redom.

Veza svetskih i sopstvenih rotacija

Predstavimo kretanje f kao kompoziciju tri sopstvene rotacije, za Ojlerove uglove, tj.

$$f = \mathcal{R}_{x_2}(\phi) \circ \mathcal{R}_{y_1}(\theta) \circ \mathcal{R}_z(\psi). \quad (7)$$

Ali, matrice tih rotacija su date u različitim reperima $e = Oxyz$, $q = Ox_1y_1z_1$, $r = Ox_2y_2z_2$ i zato ne možemo prosto zameniti matrice (2), (3) i (4) u prethodnu formulu. Naime, samo u sopstvenom reperu rotacije imaju tako jednostavne matrice. Odredimo matricu kretanja f u reperu $e = Oxyz$. Sa $C_{q \rightarrow e}$ označavamo matrice prelaska i izostavljamo uglove.

$$[\mathcal{R}_z]_e = R_z.$$

$$[\mathcal{R}_{y_1}]_e = C_{q \rightarrow e}^{-1} [\mathcal{R}_{y_1}]_q C_{q \rightarrow e} = R_z R_y R_z^{-1}.$$

$$[\mathcal{R}_{x_2}]_e = C_{q \rightarrow e}^{-1} [\mathcal{R}_{x_2}]_q C_{q \rightarrow e} = R_z (C_{r \rightarrow q}^{-1} [\mathcal{R}_{x_2}]_r C_{r \rightarrow q}) R_z^{-1} = R_z R_y R_x R_y^{-1} R_z^{-1}.$$

Sada zamenom prethodne tri formule u relaciju (7) dobijamo

$$\begin{aligned} [f]_e &= [\mathcal{R}_{x_2}]_e [\mathcal{R}_{y_1}]_e [\mathcal{R}_z]_e \\ &= (R_z R_y R_x R_y^{-1} R_z^{-1})(R_z R_y R_z^{-1}) R_z = R_z R_y R_x. \end{aligned}$$

Na taj način dobijamo, na neki način, iznenadjujuće tvrdjenje

Teorema

Ako je kretanje f predstavljeno sopstvenim rotacijama za Ojlerove uglove

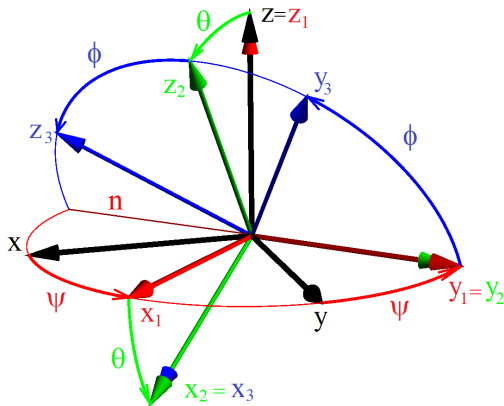
$$f = \mathcal{R}_{x_2}(\phi) \circ \mathcal{R}_{y_1}(\theta) \circ \mathcal{R}_z(\psi),$$

tada njegova matrica polaznom reperu $e = Oxyz$, proizvod matrica tih rotacija u suprotnom redosledu

$$A = [f]_e = R_z(\psi) R_y(\theta) R_x(\phi).$$

Teorema (II Ojlerova)

Svako kretanje f prostora koje ima fiksnu tačku O može se predstaviti kao kompozicija tri sopstvene rotacije.



Slika: Ojlerove rotacije

Dokaz: Neka kretanje f slika $ON+$ reper $Oxyz$ (crni) u $ON+$ reper $Ox_3y_3z_3$ (plavi). Treba dokazati da je trima sopstvenim rotacijama moguće poklopiti prvi reper sa drugim.

Opšti slučaj: ravni Oxy (crvena) i Oy_3z_3 (plava) se seku po *liniji* čvorova n . Prava n je normalna na Oz i Ox_3 . Neka je osa x_1 projekcija ose x_3 na ravan Oxy . Osa Ox_1 je normalna na n , pa neka je $Oy_1 \subset n$ tako izabrana da sa Ox_1y_1 gradi u ravni istu orijentaciju kao Oxy .

Označimo uglove (orijentaciju biramo u odnosu na Oz, Oy_1, Ox_3)

$$\psi := \angle(Oy, Oy_1), \quad \theta := \angle(Ox_1, Ox_3), \quad \phi := \angle(Oy_1, Oy_3).$$

- Sopstvena rotacija $\mathcal{R}_z(\psi)$ dovodi $Oxyz$ do $Ox_1y_1z_1$ ($Oz = Oz_1$).
- Rotacija $\mathcal{R}_{y_1}(\theta)$ dovodi $Ox_1y_1z_1$ do nekog repera $Ox_2y_2z_2$ takvog da je $y_1 = y_2, x_2 = x_3$, a Oz_2 pripada ravni Oy_3z_3 .
- Sopstvena rotacija $\mathcal{R}_{x_2}(\phi)$ dovodi $Ox_2y_2z_2$ do $Ox_3y_3z_3$.



Slika: Žiroskop

Slučaj "zaključanog žiroskopa" (*gimbal lock*): ravni Oxy i Oy_3z_3 se poklapaju, tj. $Ox_3 = \pm Oz$. U ovom slučaju dovoljne su dve rotacije da bi poklopili repere. Kaže se da je žiroskop zaključan jer smo izgubili jedan stepen slobode, pošto su sopstvene ose Oz i Ox_2 iste.

Neka je $Ox_3 = +Oz$. Tada ose Oy_3, Oz_3 pripadaju ravni Oxy , pa rotacijom $\mathcal{R}_{Oz}(\psi)$ za ugao $\psi = \angle(Oy, Oy_3)$ dobijamo reper $Ox_1y_1z_1$ takav da $Oz_1 = Ox_3, Oy_1 = Oy_3, Ox_1 = -Oz_3$. Sada rotacijom $\mathcal{R}_{Oy_1}(\theta)$ za ugao $\theta = -\frac{\pi}{2}$ dobijamo sistem $Ox_2y_2z_2$ koji se poklapa sa sistemom $Ox_3y_3z_3$, pa uzimamo $\phi = 0$, tj. sopstvena rotacija oko Ox_2 nije potrebna.

U slučaju $Ox_3 = -Oz$ analiza je slična: uzimamo $\psi = \angle(Oy, Oy_3)$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = 0$. Skicirati oba slučaja! □

Matrica kompozicije sopstvenih rotacija je $R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi) =$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Ako je $\theta = -\frac{\pi}{2}$, odnosno $\theta = \frac{\pi}{2}$ dobijamo:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sin(\phi + \psi) & -\cos(\phi + \psi) \\ 0 & \cos(\phi + \psi) & -\sin(\phi + \psi) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \sin(\phi - \psi) & \cos(\phi - \psi) \\ 0 & \cos(\phi - \psi) & -\sin(\phi - \psi) \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

U dokazu je u oba "zaključana" slučaja dato jedno moguće rešenje, pošto ugao $\phi = 0$ nismo koristili. Sva rešenja su

$$\phi + \psi = \angle(Oy, Oy_3) = \arccos a_{22}, \quad \text{tj.} \quad \phi - \psi = \angle(Oy, Oy_3) = \arccos a_{22}.$$

Upravo ta neodređenost je najveći nedostatak Ojlerovih uglova.

Algoritam **A2Euler** za određivanje Ojlerovih uglova

Ulaz: Ortogonalna matrica $A = (a_{ij})$, $\det A = 1$.

Izlaz: Ojlerovi uglovi ψ, θ, ϕ , $A = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$

Algoritam:

```

if ( $a_{31} < 1$ ) {
    if ( $a_{31} > -1$ ) { // jedinstveno rešenje
         $\psi = \text{atan2}(a_{21}, a_{11})$ ;
         $\theta = \text{asin}(-a_{31})$ ;
         $\phi = \text{atan2}(a_{32}, a_{33})$ ;
    } else { // nije jedinstveno, slučaj  $Ox_3 = -Oz$ 
         $\psi = \text{atan2}(-a_{12}, a_{22})$ ;
         $\theta = \frac{\pi}{2}$ ;  $\phi = 0$ ;
    } else { // nije jedinstveno, slučaj  $Ox_3 = Oz$ 
         $\psi = \text{atan2}(-a_{12}, a_{22})$ ;
         $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ;  $\phi = 0$ ;
    }
}

```

Primer

Neka je f kretanje dato matricom A iz Primera 2. a) Odrediti Ojlerove uglove ψ, θ, ϕ , tj. predstaviti f kao kompoziciju sopstvenih rotacija. b) Predstaviti A u obliku $A = R_z R_y R_x$.

Primer

Dato je kretanje matricom

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

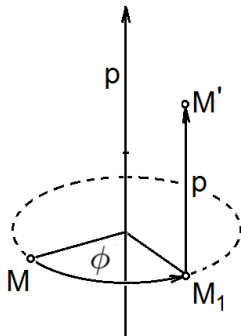
za koju Ojlerovi uglovi nisu jedinstveni (gimbal lock). Prestaviti matricu A u obliku $A = R_z R_y R_x$ na bar tri načina. Sva tri načina objasniti na primeru nekog fizičkog tela.

Pokazali smo da telo u neki položaj možemo dovesti na bar 3 načina (pod uslovom da je neka tačka O fiksna, ako nije onda je potrebna i translacija):

- Jednom rotacijom $\mathcal{R}_p(\phi)$ oko pogodno odabrane prave;
- Trima sopstvenim rotacijama za Ojlerove uglove;
- Trima svetskim rotacijama za Ojlerove uglove, ali u obrnutom redosledu.

Mi smo ovde izabrali pristup redosled $z - y - x$, ali u praksi redosled nije bitan, i ravnopravno se koriste svi mogući redosledi.

Mada nam u računarskoj grafici nije od značaja, pomenimo još jedan način za predstavljanje kretanja, koji se koristi u robotici.



Slika: Zavojno kretanje

Zavojno kretanje je kompozicija translacije i rotacije

$$\mathcal{Z}_{\lambda \vec{p}}(\phi) := \mathcal{R}_{\vec{p}}(\phi) \circ \mathcal{T}_{\lambda \vec{p}} = \mathcal{T}_{\lambda \vec{p}} \circ \mathcal{R}_{\vec{p}}(\phi).$$



Slika: Vilijam Hamilton (1805-1865), irski matematičar

Kvaternioni

Kvaternioni su brojevi oblika:

$$\mathbb{H} = \{xi + yj + zk + w \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\},$$

gde su i, j i k , tzv. imaginarne jedinice.

U odnosu na prirodno definisano sabiranje i množenje realnim brojem, kvaternioni su četvorodimenzioni vektorski prostor, $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$.

Realni i kompleksni brojevi su takodje kvaternioni, tj. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$.

Množenje kvaterniona \cdot je definisano relacijama:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i.$$

Primer

Odrediti zbir $q_1 + q_1$ i proizvode $q_1 \cdot q_2, q_2 \cdot q_1$ kvaterniona

$$q_1 = 3i - 5k + 1, \quad q_2 = i + j + 7.$$

Množenje kvaterniona **jeste asocijativno**, ali **nije komutativno**.

Realni i imaginarni deo kvaterniona q su redom:

$$\operatorname{Re}(q) := w, \quad \operatorname{Im}(q) := xi + yj + zk = \vec{v}.$$

Potprostor $\operatorname{Im} \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$ generisan sa i, j i k nazivamo **prostor imaginarnih kvaterniona**.

Identifikaciju $\mathbb{H} = \operatorname{Im} \mathbb{H} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}$ obično zapisujemo u obliku:

$$q = xi + yj + zk + w = [(x, y, z), w] = [\vec{v}, w].$$

Konjugovani kvaternion kvaterniona $q = [\vec{v}, w]$, definišemo sa:

$$\bar{q} := -xi - yj - zk + w = [-\vec{v}, w].$$

U odnosu na skalarni proizvod $\langle q, q_1 \rangle = xx_1 + yy_1 + zz_1 + ww_1$, norma kvaterniona je

$$|q| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}.$$

Lema (Osobine sabiranja, množenja, konjugovanja i norme)

(a) $q + q_1 = [\vec{v}, w] + [\vec{v}_1, w_1] = [\vec{v} + \vec{v}_1, w + w_1];$

(b) $qq_1 = [\vec{v}, 0][\vec{v}_1, 0] = [\vec{v} \times \vec{v}_1, -\langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle], \quad q, q_1 \in \text{Im}\mathbb{H};$

(c) $qq_1 = [\vec{v}, w][\vec{v}_1, w_1] = [\vec{v} \times \vec{v}_1 + w\vec{v}_1 + w_1\vec{v}, ww_1 - \langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle].$

(d) $\overline{qq_1} = \bar{q}_1\bar{q}, \quad \overline{q + q_1} = \bar{q} + \bar{q}_1, \quad \bar{\bar{q}} = q, \quad \text{Re } q = \frac{q + \bar{q}}{2}, \quad \text{Im } q = \frac{q - \bar{q}}{2};$

(e) $|q|^2 = q\bar{q} = \bar{q}q, \quad \langle q, q_1 \rangle = \text{Re}(\bar{q}q_1);$

(f) $|qq_1| = |q||q_1|;$

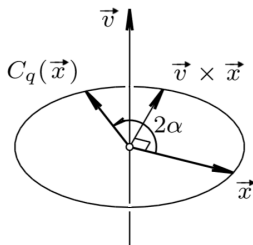
(g) $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}, \quad (qq_1)^{-1} = q_1^{-1}q^{-1}.$

Konjugacija kvaternionom $q \neq 0$ je preslikavanje $C_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$

$$C_q(p) := qpq^{-1}.$$

Lema

- a) $C_q \equiv C_h$, $q, h \neq 0$ ako i samo ako važi $h = \lambda q$, $\lambda \in \mathbb{R}/\{0\}$.
- c) $C_{q_2} \circ C_{q_1} = C_{q_2 q_1}$.
- c) C_q je kretanje prostora $\text{Im}\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$.
- d) Ako važi $q = [\vec{v} \sin \alpha, \cos \alpha]$ i $|\vec{v}| = 1$, preslikavanje C_q je rotacija za ugao 2α oko vektora \vec{v} u pozitivnom smeru.



Slika: Rotacija kvaternionom $q = [\vec{v} \sin \alpha, \cos \alpha]$

Primetimo da je zbog osobine a) dovoljno posmatrati rotacije kvaternionima dužine 1. Jedinični kvaternioni q i $-q$ predstavljaju istu **svetsku** rotaciju.

Svi jedinični kvaternioni čine trodimenzionu sferu:

$$\mathbb{H}_1 = \{q \in \mathbb{H} \mid 1 = |q|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2\} \subset \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4.$$

Zbog b) skup \mathbb{H}_1 čini grupu u odnosu na množenje kvaterniona.

Svaki jedinični kvaternion $\pm q \in \mathbb{H}_1$ možemo zapisati u obliku $q = [\vec{v} \sin \alpha, \cos \alpha]$ za neki $|\vec{v}| = 1$ i neki ugao $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Dakle, svaki $\pm q \in \mathbb{H}_1$ predstavlja neku **svetsku** rotaciju $\mathcal{R}_{\vec{v}}(2\alpha)$ prostora $\mathbb{R}^3 \cong \text{Im}\mathbb{H}$ i obrnuto.

$$SO(3) = \{ \text{rotacije oko pravih} \} = \mathbb{H}_1 / \pm (= \mathbb{R}P^3).$$

Primer

Direktnim množenjem kvaterniona dokazati da konjugacija a) C_i predstavlja rotaciju $\mathcal{R}_x(\pi)$; b) $C_{\frac{\sqrt{3}}{2}k + \frac{1}{2}}$ predstavlja rotaciju $\mathcal{R}_z(\frac{2\pi}{3})$. Šta predstavljaju konjugacije za suprotne kvaternione C_{-i} , odnosno $C_{-\frac{\sqrt{3}}{2}k - \frac{1}{2}}$?

Primer

Odrediti kvaternion q tako da konjugacija C_q predstavlja rotaciju $\mathcal{R}_p(\frac{\pi}{2})$ oko vektora $p = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$ za ugao $\phi = \frac{\pi}{2}$ (iz Primera 2).

Primer

Na osnovu osobine Leme 2 b) važi $C_j \circ C_i = C_{ji} = C_k$. Šta to znači na jeziku rotacija? Precizno proveriti crtanjem.

Algoritam **AngleAxis2Q**: rotacija u kvaternion

Ulaz: Rotacija $\mathcal{R}_p(\phi)$ oko ose $p = (p_x, p_y, p_z)$ za ugao $\phi \in [0, 2\pi)$;

Izlaz: Jedinični kvaternion $q \in \mathbb{H}_1$ takav da $C_q = \mathcal{R}_p(\phi)$.

Algoritam:

$$w = \cos \frac{\phi}{2};$$

$$p = \textit{normalize}(p);$$

$$(x, y, z) = \sin \frac{\phi}{2}(p_x, p_y, p_z);$$

$$q = xi + yj + zk + w.$$

Napomene:

- za $\phi = 0$, rotacija je identitet, a kvaternion $q = \pm 1$;
- kvaternioni $\pm q$ predstavljaju istu rotaciju.

Algoritam Q2AngleAxis: kvaternion u rotaciju

Ulaz: (Jedinični) kvaternion $q = xi + yj + zk + w$;

Izlaz: Jedinični vektor $p = (p_x, p_y, p_z)$ i ugao $\phi \in [0, 2\pi)$

($\phi \in [0, \pi]$) tako da $C_q = \mathcal{R}_p(\phi)$.

Algoritam:

$q = \text{normalize}(q)$;

if ($w < 0$) { $q = -q$ } // samo ako želimo $\phi \in [0, \pi]$

$\phi = 2 \arccos w$;

if ($|w| = 1$) {

$p = (1, 0, 0)$; // identitet - p bilo koji jedinični

} **else** {

$p = \text{normalize}(x, y, z)$

}

Četiri načina za predstavljanje "orientacija", tj. rotacija

Ojlerovi uglovi ψ, θ, ϕ svetskih rotacija;

$$(8) = A = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi) \quad \Downarrow \quad \Uparrow \quad \text{A2Euler}$$

Matrica $A, A^T A = E, \det A = 1$

$$\text{A2AngleAxis} \quad \Downarrow \quad \Uparrow \quad \text{Rodriguez (5)}$$

Osa-ugao $\mathcal{R}_p(\varphi)$

$$\text{AngleAxis2Q} \quad \Downarrow \quad \Uparrow \quad \text{Q2AngleAxis}$$

Kvaternion $q = xi + yj + zk + w$

Položaj objekta u prostoru

U računarskoj grafici se koriste bliski pojmovi "orientacije" (eng. *orientation*) i rotacije (eng. *rotation*). Pod rotacijom se podrazumeva kretanje prostora koje je, kao što znamo, rotacija.

Svaki je objekat (telo, kamera...) inicijalno zadat u svetskom koordinatnom sistemu (centar, tj. težište, mu je u koordinatnom početku, a ose poravnate sa koordinatnim osama).

Kada se taj objekat pomeri, novi položaj je zadat "pozicijom" (eng. *position*) i "orientacijom." Pozicija predstavlja (x, y, z) koordinate centra objekta, a "orientacija" označava kako je taj objekat zarotiran u prostoru.

"Orientacija" može biti zadata Ojlerovim uglovima, ortogonalnom matricom, osom i uglom, ili kvaternionom kojima se objekat dovodi iz njegovog inicijalnog položaja novu "orientaciju."

Nepisano je pravilo da se pri programiranju za zadavanje "orientacije" koriste kvaternioni, a u interfejsu Ojlerovi uglovi.

Interpolacije između položaja objekta

Često se javlja potreba da objekt iz jednog položaja dovedemo u drugi (animacija kao kretanje kamere i/ili kretanje objekta).

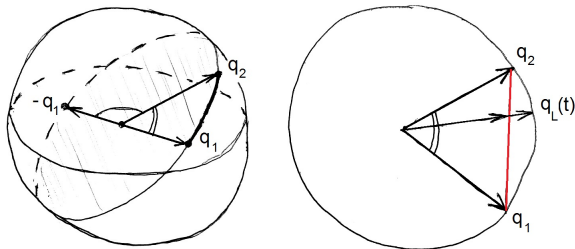
Promena pozicije centra objekta se jednostavno rešava linearnom interpolacijom. Naime, ako je centar objekta bio u poziciji $C_1(x_1, y_1, z_1)$, a treba ga dovesti u poziciju $C_2(x_2, y_2, z_2)$ najprirodnija je **linearna interpolacija**:

$$C(t) = \left(1 - \frac{t}{t_u}\right)C_1 + \frac{t}{t_u}C_2, \quad t \in [0, t_u]. \quad (9)$$

Radi se zapravo o pravolinijskom kretanju konstantnom brzinom koje traje t_u jedinica vremena. Dakle, dve pozicije povezujemo sa duži, tj. delom prave linije.

Promena "orijentacije" objekta je mnogo suptilnija i zavisi od toga kako je ta orijentacija zadata. Ako su $O_1(\phi_1, \theta_1, \psi_1)$ i $O_2(\phi_2, \theta_2, \psi_2)$ dve "orijentacije" objekta zadate Ojlerovim uglovima, linearna interpolacija (9) često daje katastrofalan rezultat, posebno ako su "orijentacije daleko."

Jedini prirodan amibijent za interpolaciju "orijentacija" su kvaternioni. Neka su "orijentacije" objekta zadate kvaternionima $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_1$ koji pripadaju jediničnoj trodimenzionoj sferi $\mathbb{H}_1 \subset \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$.



Slika: Interpolacija između dva kvaterniona

Ako je ugao $\angle(q_1, q_2)$ tup, tj. $\langle q_1, q_2 \rangle < 0$, uzimamo $-q_1$ umesto q_1 , pa ugao $\angle(q_1, q_2)$ postaje oštar (biramo kraći luk kruga na sferi).

Lerp interpolacija (od **L**inear **i**nter**p**olation) je kada se uzme kvaternion na duži $q_1 q_2$, a zatim se normira i time vrati na jediničnu sferu.

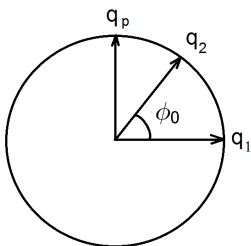
$$\bar{q}(t) = \left(1 - \frac{t}{t_m}\right)q_1 + \frac{t}{t_m}q_2,$$

$$q_L(t) = \frac{\bar{q}(t)}{|\bar{q}(t)|} = \text{normalize}(\bar{q}(t)), \quad t \in [0, t_m]. \quad (10)$$

Ona se obično koristi kada je ugao između q_1 i q_2 mali.

Slerp interpolacija (od **S**pherical **L**inear **i**nter**p**olation) je parametrizacija kružnog luka $q_1 q_2$, gde je parametar odgovarajući centralni ugao.

Objekat čije je kretanje parametrizovano Slerp interpolacijom ima konstantnu ugaonu brzinu i minimalno uvrtnje ("troši najmanje energije"). Zato je Slerp daje vizuelno najbolji rezultat.



Slika: Izvodjenje Slerp interpolacije

Da bismo odredili SLerp interpolaciju, neka je q_p jedinični kvaternion u ravni $q_1 q_2$ koji je normalan na q_1 . Kvaternioni q_1 i q_2 grade neki (oštar) ugao ϕ_0 , tj. važi $\cos \phi_0 = \langle q_1, q_2 \rangle > 0$. Sada je parametrizacija kružnog luka

$$q_s(t) = \cos \frac{t\phi_0}{t_m} q_1 + \sin \frac{t\phi_0}{t_m} q_p, \quad t \in [0, t_m]. \quad (11)$$

Kvaternion q_p možemo zapisati kao

$$q_p = \alpha q_1 + \beta q_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Iz uslova $q_p \perp q_1$, tj. $0 = \langle q_p, q_1 \rangle$ dobijamo da je $\alpha = -\beta \langle q_1, q_2 \rangle$. Sada je

$$q_p = \beta(-\langle q_1, q_2 \rangle q_1 + q_2).$$

Iz uslova da je $1 = |q_p|^2 = \langle q_p, q_p \rangle$ dobijamo da je $\beta = \frac{1}{\sin \phi_0}$, pa je

$$q_p = -\frac{\cos \phi_0}{\sin \phi_0} q_1 + \frac{1}{\sin \phi_0} q_2. \quad (12)$$

Zamenom (12) u (11) i sredjivanjem konačno dobijamo

$$q_s(t) = \frac{\sin(\phi_0(1 - \frac{t}{t_m}))}{\sin \phi_0} q_1 + \frac{\sin(\phi_0 \frac{t}{t_m})}{\sin \phi_0} q_2, \quad t \in [0, t_m]. \quad (13)$$

Algoritam: SLerp interpolacija

Ulaz: Jedinični kvaternioni q_1 i q_2 , koji zadaju početnu i krajnju "orijentaciju", dužina interpolacije t_m , parametar $t \in [0, t_m]$.

Izlaz: Jedinični kvaternion $q_S(t)$ koji zadaje "orijentaciju" u trenutku t .

Algoritam:

$$\text{cos0} = \langle q_1, q_2 \rangle;$$

if ($\text{cos0} < 0$) { // idi po kraćem luku sfere

$$q_1 = -q_1; \text{cos0} = -\text{cos0}; \}$$

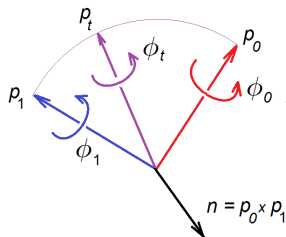
if ($\text{cos0} > 0.95$) { // kvaternioni q_1 i q_2 previše blizu

vrati q_1 ili koristi lerp interpolaciju

}

$$\phi_0 = \arccos(\text{cos0});$$

$$q_S(t) = \frac{\sin(\phi_0(1 - \frac{t}{t_m}))}{\sin \phi_0} q_1 + \frac{\sin(\phi_0 \frac{t}{t_m})}{\sin \phi_0} q_2.$$



Slika: Interpolacija osom i uglom

Interpolacija osom i uglom je prirodna i daje dobre rezultate. Neka su osom i uglovima data dve orijentacije $R_{p_0}(\phi_0)$ i $R_{p_1}(\phi_1)$.

Neka je $n = p_0 \times p_1$ i $\theta = \angle(p_0, p_1)$. Osu i ugao interpoliramo sa

$$p_t = R_n(t\theta)(p_0), \quad \phi_t = (1-t)\phi_0 + t\phi_1, \quad t \in [0, 1].$$

Interpolacija orijentacije je sada zadata sa $R_{p_t}(\phi_t)$, $t \in [0, 1]$.

Za vežbu se ostavlja provera da se za $t = 0$ i $t = 1$ dobijaju date orijentacije.

Poredjenje različitih predstavljanja "orijentacija"

- **Matrice**

"suštinski način", jednostavna kompozicija, 4×4 matrice predstavljaju i translaciju, loša interpolacija;

- **Ojlerovi uglovi (svetske ili sopstvene rotacije)**

najočiglednije predstavljanje (upotreba u interfejsu), "gimbal lock" problem, loša interpolacija, teška kompozicija;

- **Osa i ugao**

nema "gimbal lock" problema, dobra interpolacija, teška kompozicija;

- **Kvaternioni**

nema "gimbal lock" problema, dobra interpolacija, laka kompozicija, relativno teški za razumevanje i implementaciju.

Senzori u mobilnim uredjajima

Moderna elektronika je omogućila da se mobilni uredjaji (pametni telefoni, tableti, pametni satovi...) i drugi elektronski uredjaji mogu opremiti minijaturnim, relativno jeftinim, a veoma preciznim senzorima.

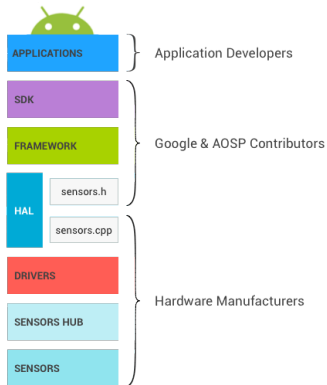
Senzore možemo grubo podeliti u sledeće grupe:

- Kamere (kolor, crno bele, 3D (dve ili više kamera), termalne (thermal)...);
- Senzori pokreta (akcelerometar, žiroskop (gyroscope), pedometar);
- Senzori pozicije (magnetometar, GPS, barometar);
- Senzori svetla i zvuka (mikrofon, senzor blizine (proximity), tj. udaljenosti (laser, IR, ultrawave), senzor ambijentnog svetla (ambient light));
- Ostalo: senzor temperature, vlažnosti (humidity), otiska prsta (fingerprint), pulsometar, zasićenost kiseonikom (SpO2)...

Na Android uređajima lista senzora se dobija sa

`SensorManager.GetSensorList(int type)`.

Često se rad, tj. preciznost nekog senzora potpomaže drugim ("sensor fusion");



Slika: Android "sensor stack"

Senzori pokreta

Ovi senzori su često integrisani na jednom čipu. Rade se MEMS (MicroElectroMechanicalSystem) tehnologijom i sadrže mikroskopske pokretne delove. Često rade zajedno: pedometar, senzor "značajnog pokreta" (significant motion).

- **Akcelerometar**

Meri tzv. **linearno ubrzanje**, po principu: ubrzanje je proporcionalno sili, a sila proporcionalna istezanju opruge. I tako u tri pravca. Rezultat je **3-vektor linearnog ubrzanja** u koje je uračunato i ubrzanje gravitacije od $9.8m/s^2$.

Kod mobilnih telefona često je x -osa po širini ekrana, y -osa po visini, a z je na njih (tj. na sam uređjaj) ortogonalna. Kako je podrazumevano ekran uspravan - gravitacija ide u pravcu negativne y -ose.

- **Žiroskop**

Meri takozvano **ugaono ubrzanje**, na osnovu Koriolisove sile, takodje u tri pravca, tako da rezultat je **orijentacija uređaja, tj. kvaternion** (tacnije, orijentacija se dobija dvostrukom integracijom ugaonog ubrzanja).

- **Magnetometar** ili tzv. elektronski kompas. Radi po principu Halovog efekta (utica magnetnog polja na kretanje elektrona), a kao rezultat daje **3-vektor magnetnog polja**.

Koristan je za odredjivanje pravca severa, a može se koristiti i za detekciju metalnih predmeta.

Pravac severa je važan jer se uz pomoć njega i GPSa dobija globalna orijentacija uređaja u prostoru, a onda se akcelerometrom i žiroskopom dobija lokalna orijentacija.