

Zadaci iz Primena projektivne geometrije u računarstvu (Geometrijske vizuelizacije)

- za rad na vežbama -

septembar 2018.

1 Projektivna preslikavanja

1. Date su prave $a : 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$, $b : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, $c : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$, $d : x_1 - x_2 = 0$. Izračunati dvorazmeru (a, b, c, d) .
2. a) Odrediti, u homogenim koordinatama, jednačinu prave $p = AB$, $A(1, \frac{5}{2})$ i $B(-3, 0)$; b) Pokazati da tačka $C(-1 : 5 : 3)$ pripada pravoj p ; c) Odrediti tačku D takvu da važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.
3. U proširenoj afinoj ravni date su prave $m : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, i $n : 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$. a) Odrediti presek P pravih m i n ; b) Odrediti pravu k koja sadrži tačke P i $C(-1 : 5 : 3)$ i pravu l koja sadrži tačku P i paralelna je pravoj $p : 5x - 8y + 15 = 0$; c) Odrediti dvorazmeru pravih (m, n, k, l) .
4. Date su kolinearne tačke $A(1, 1)$, $B(5, 5)$, $C(-1, -1)$, $D(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Koristeći afini smisao dvorazmere, izračunati (A, B, C, D) .
5. Podnožja telefonskih stubova $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ su u stvarnosti medjusobno udaljena $40m$ i kolinearna. Tačke $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, \dots$ su njihove slike na perspektivnom crtežu, a $A' = \lim_{n \rightarrow \infty} A'_n$ je tačka na crtežu u kojoj ti stubovi iščezavaju. Ako je $A'_1 A'_2 = 5cm$, $A'_2 A'_3 = 4cm$, odrediti: i) $A'_3 A'_4$; ii) $A'_4 A'$.
6. Data je matrica

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i tačke $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ Odrediti i skicirati sliku $A'B'C'$ trougla $\triangle ABC$ pri projektivnom preslikavanju f čija je matrica P ako a) $C(2, 0)$; b) $C(0, 0)$; c) $C(-1, 0)$;

7. U procesu rektifikacije tačke $A(1, 1)$, $B(4, 2)$, $C(3, 3)$, $D(1, 3)$ preslikane su redom u temena pravougaonika $ABCD$, preslikavanjem f . Bez određivanja projektivnog preslikavanja f odrediti jednačinu prave u koja se preslikala u beskonačno daleku pravu.
8. Dati su trapez $ABCD$, $A(-3, -1)$, $B(3, -1)$, $C(1, 1)$, $D(-1, 1)$; i pravougaonik $A'B'C'D'$, $A'(-2, -1)$, $B'(2, -1)$, $C'(2, 1)$, $D'(-2, 1)$. Projektivno preslikavanje f ravno $\bar{\mathbb{R}}P^2$ slika trapez u pravougaonik ($A \rightarrow A', B \rightarrow B', \dots$). a) Bez određivanja preslikavanja f odrediti koja se prava slika beskonačno daleko; b) Odrediti matricu P preslikavanja f (**test primer**).
9. Dokazati da je u matrici $P = (p_{ij})$, projektivnog preslikavanja dopunjene afine ravni $\bar{\mathbb{R}}^2$, element $p_{33} = 0$ ako i samo ako se koordinatni početak slika beskonačno daleko.

10. a) Ako je $\lambda X' = PX$ projektivna transformacija tačaka, dokazati da se prave slikaju po pravilu $\lambda u' = P^{-T}u$ ($P^{-T} = (P^T)^{-1} = (P^{-1})^T$). b) Koristeći dokazano pod a), preslikati pravu $u : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ preslikavanjem čije je matrica P data u Zadatku 6. c) Proveriti rezultat b) preslikavanjem dve tačke $A, B \in u$.