GEOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE

Prof. dr Ljiljana Petruševski
MATEMATIKA U ARHITEKTURI 2

GEOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE

Kada su u pitanju geometrijske transformacije, mora se biti veoma pažljiv u odnosu na objekat koji se transformiše.

Govorimo o dve vrste transformacija:

transformacija objekta,

transformacija koordinatnog sistema.

U ovom delu govorimo o geometrijskim transformacijama objekata u fiksiranom globalnom koordinatnom sistemu.

EUKLIDSKE GEOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE :

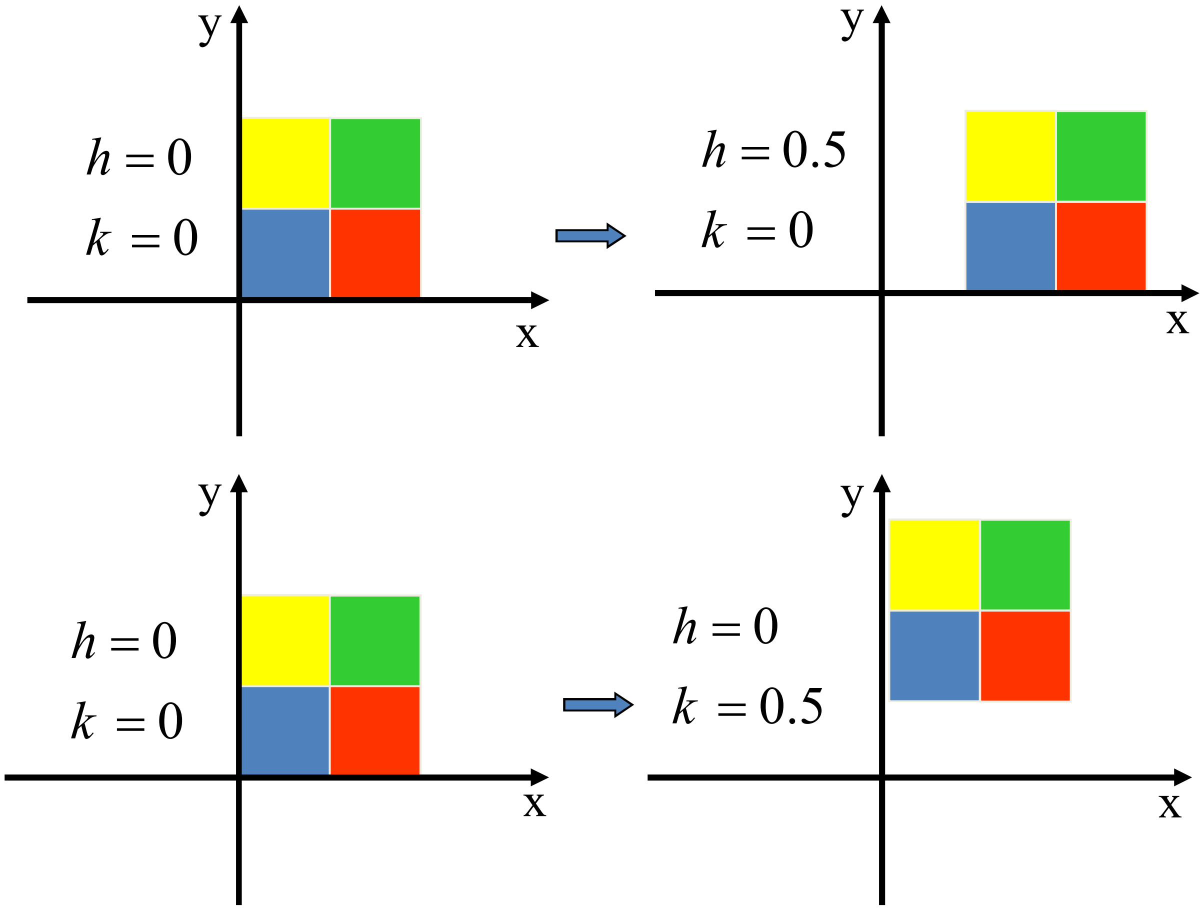
Translacija

Rotacija

Refleksija

TRANSLACIJA U RAVNI

транслација



у правцу x-осе

за h $(x \rightarrow x+h)$

$M(x, y) \rightarrow M(x+h, y)$

у правцу y-осе

за k

$(y \rightarrow y+k)$

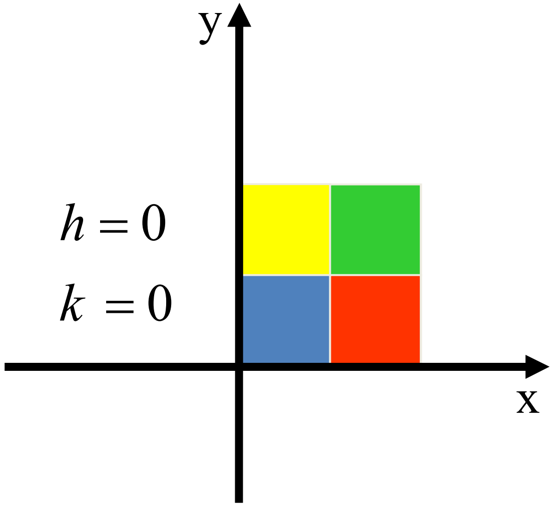
$M(x, y) \rightarrow M(x, y+k)$

TRANSLACIJA U RAVNI

транслација

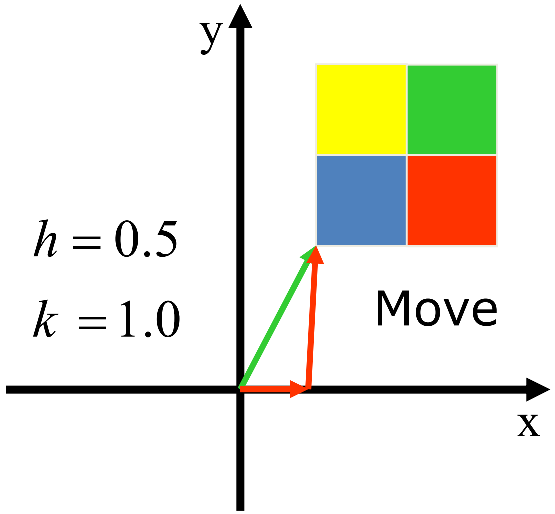
$h = 0$

$k = 0$



$h = 0.5$

$k = 1.0$



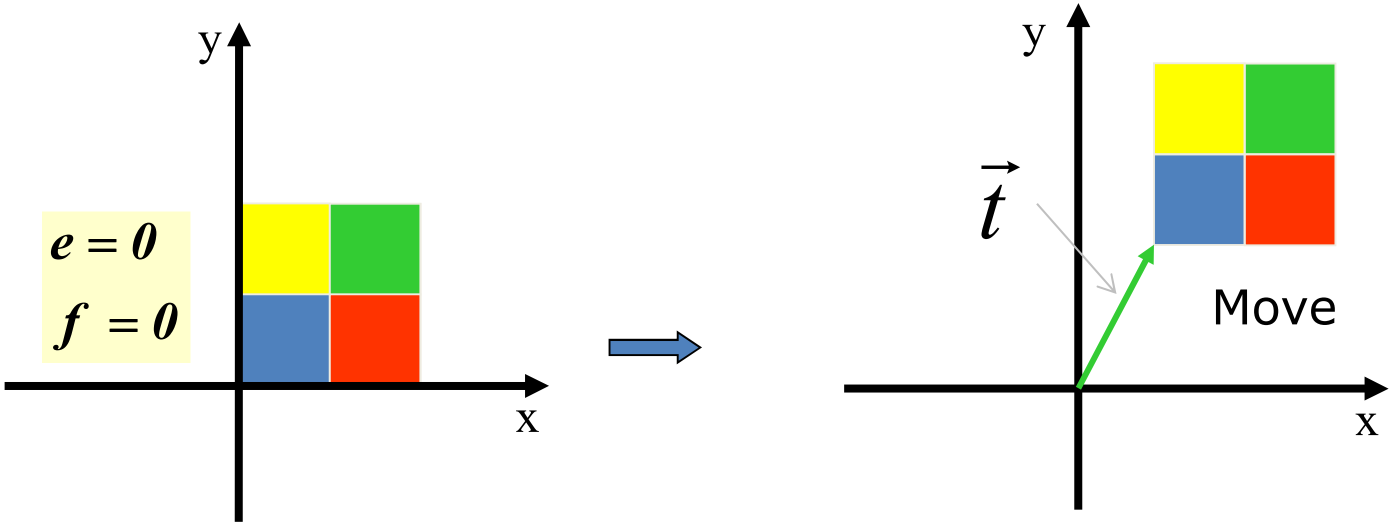
$$M(x, y) \;\Downarrow\; M'(x+h, y+k)$$

Свака транслација је композиција транслације у правцу x-осе и транслације у правцу y-осе

$$M(x, y) \;\Downarrow\; M_p(x+h, y) \;\Uparrow\; M'(x+h, y+k)$$

TRANSLACIJA U RAVNI

$M(x, y)$ $\quad M'(x+h, y+k)$ $\quad \vec{t}\,(h, k)$



$$M(x, y) \longrightarrow M'(x', y')$$

$$x' = x + h$$

$$y' = y + k$$

TRANSLACIJA U RAVNI

$$M(x,y) \longrightarrow M'(x',y')$$

$$x' = x + h$$
$$y' = y + k$$

Homogene koordinate

$$M(x,y) \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M'(x',y') \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + h$$
$$y' = y + k$$
$$1 = 1$$

TRANSLACIJA U RAVNI

Homogene koordinate

$$x' = x + h$$

$$y' = y + k$$

$$1 = 1$$

Homogene koordinate

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

TRANSLACIJA U RAVNI

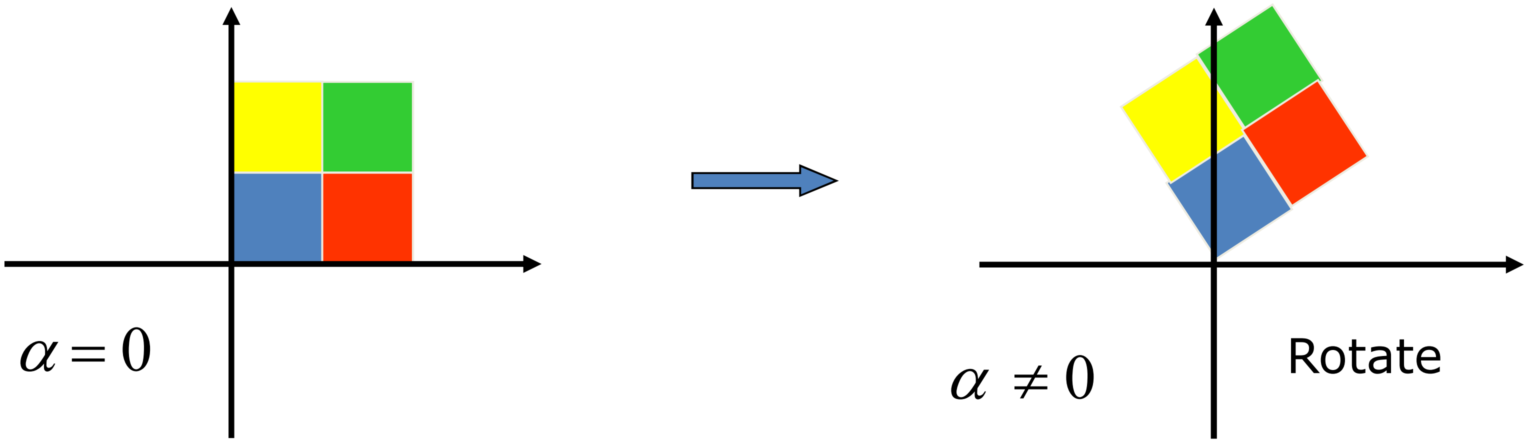
primer

Napisati matricu translacije za vektor $\vec{t} = (-3, 5)$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ROTACIJA U RAVNI

ротација



$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

$$1 = 1$$

ROTACIJA U RAVNI

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

$$1 = 1$$

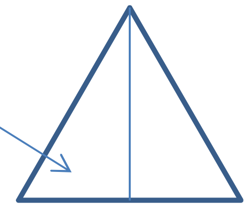
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R \qquad\qquad R^{-1}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R^{-1} = R^{T}$$

ROTACIJA U RAVNI - primer

Napisati matricu rotacije za ugao $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$



$$R = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ROTACIJA U RAVNI - primer

Napisati matricu rotacije za ugao $\frac{\pi}{4} = 45^0$ i matricu inverzne transformacije

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacija za 45^0

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacija za -45^0

TRANSLACIJA U PROSTORU

Translacija u prostoru je slična translaciji u ravni. Koordinatama tačke dodaju se koordinate vektora translacije $\vec{t} = (p, q, r)$.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 & -q \\ 0 & 0 & 1 & -r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + p \qquad x = x' - p$$

$$y' = y + q \qquad y = y' - q$$

$$z' = z + r \qquad z = z' - r$$

$$1 = 1 \qquad 1 = 1$$

TRANSLACIJA U PROSTORU - primer

Napisati matricu translacije za vektor $\vec{t} = (-5, 3, 2)$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ROTACIJA U PROSTORU

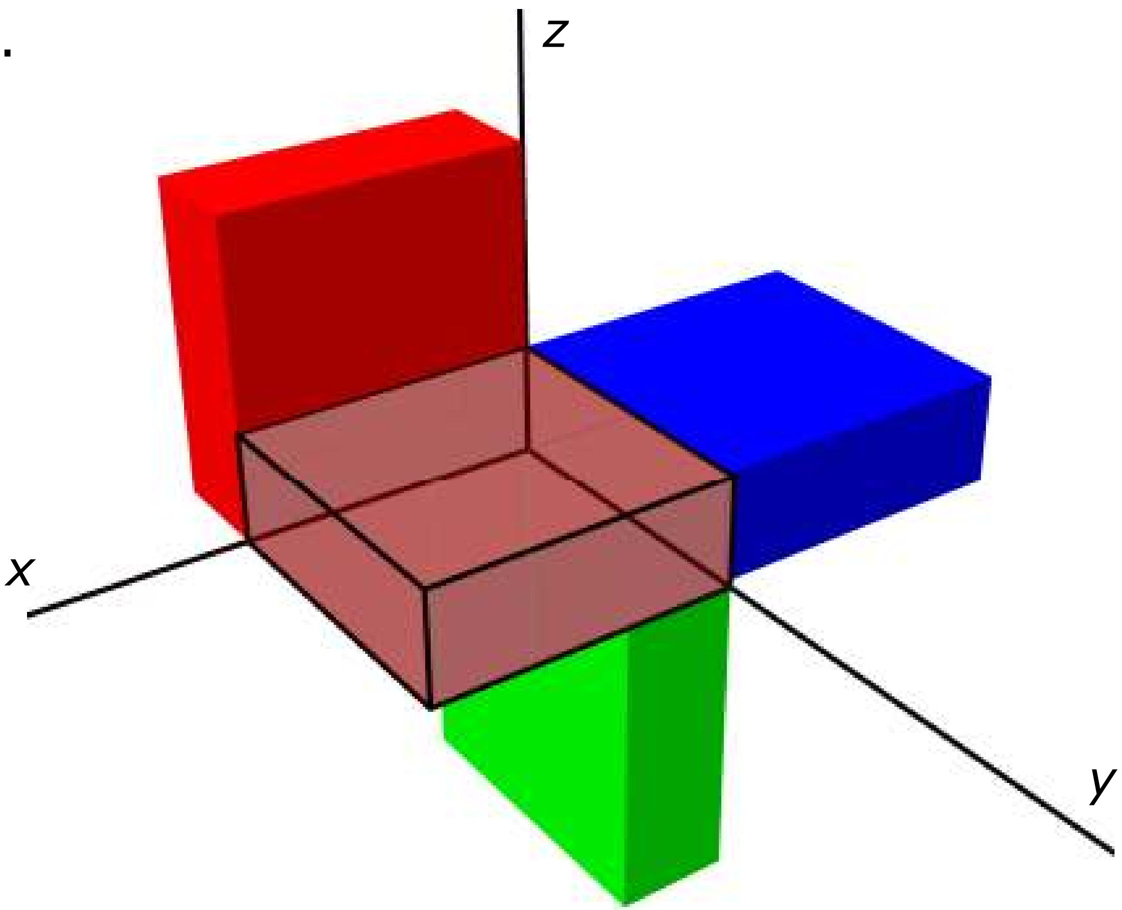
Rotacija u prostoru je složenija zato što imamo rotaciju oko

x-ose, *y*-ose i *z*-ose.

Rotacija oko

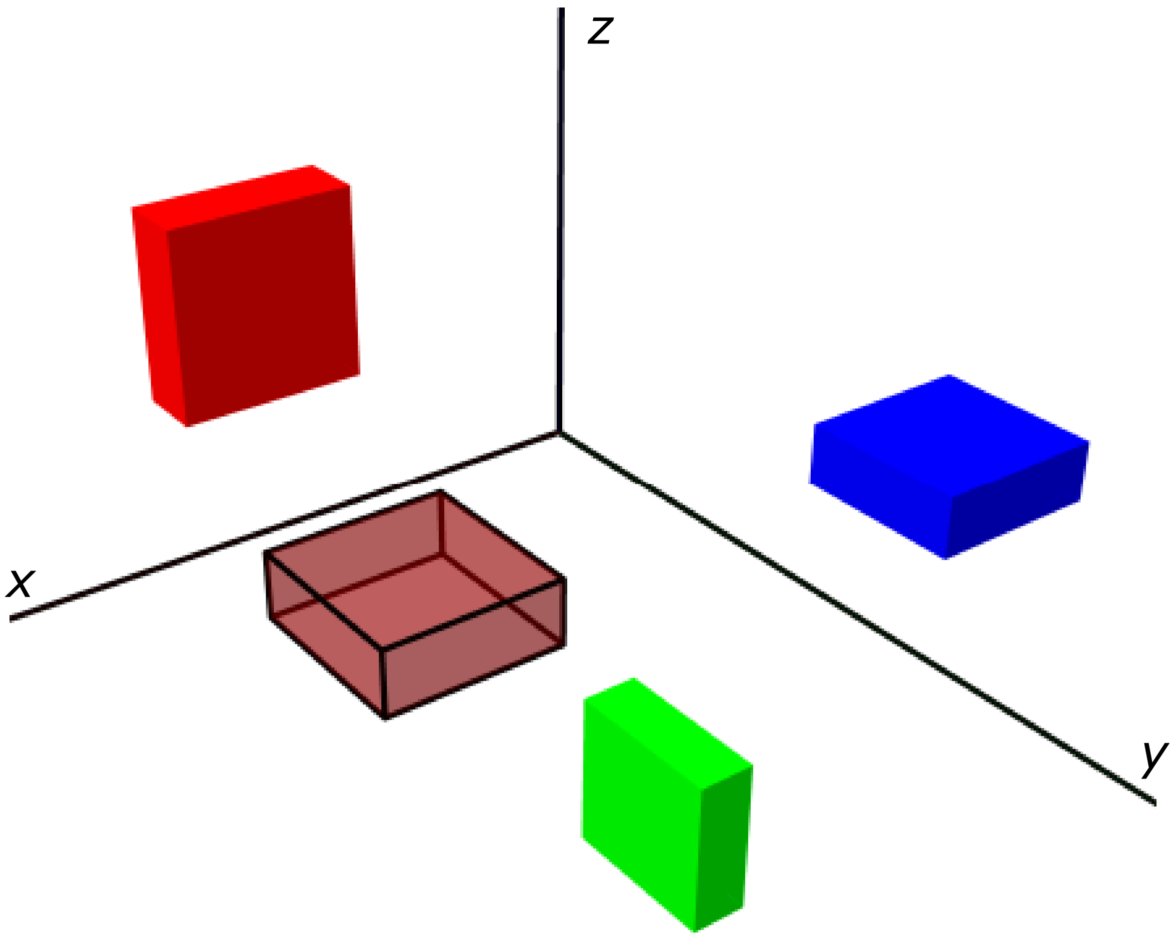
x-ose, *y*-ose i *z*-ose

za ugao $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^0$



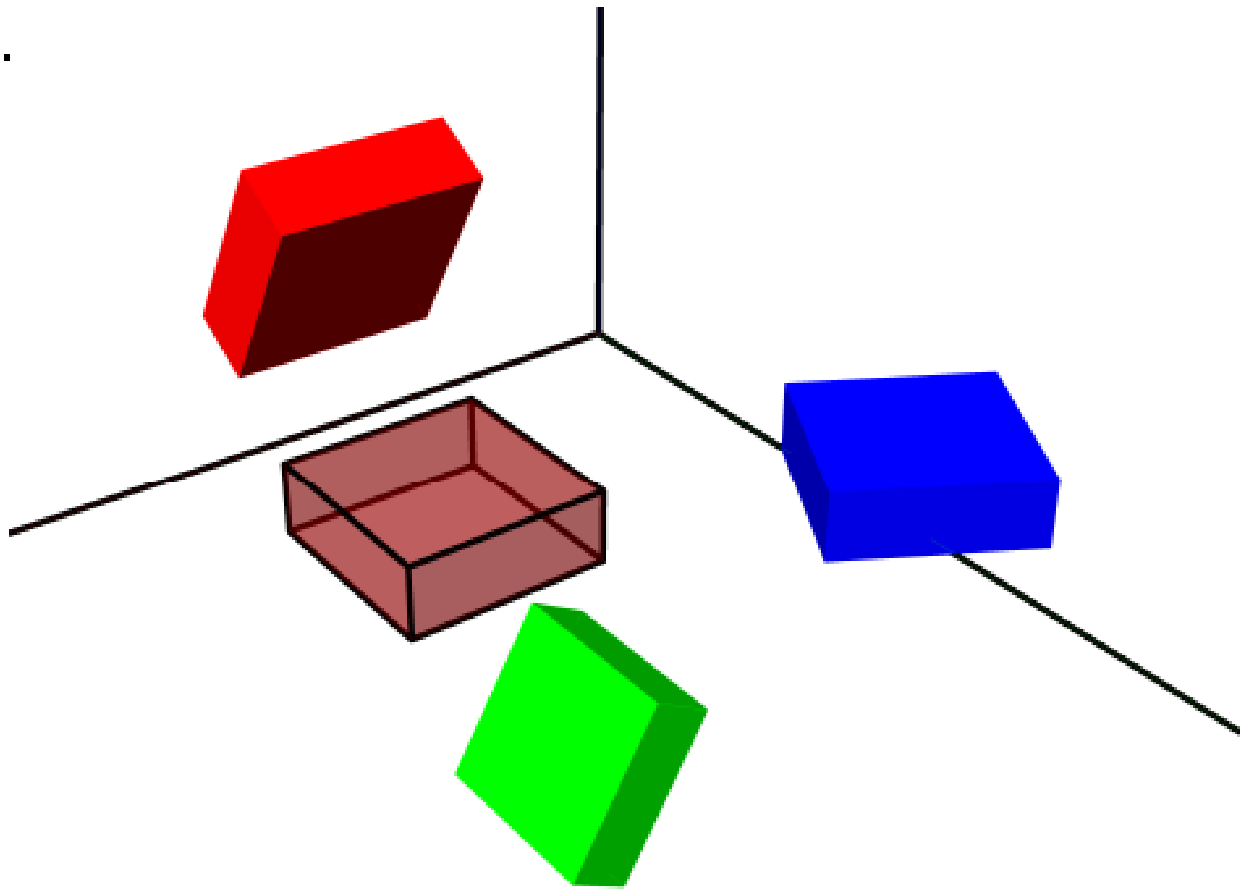
ROTACIJA U PROSTORU

Rotacija oko x-ose, y-ose i z-ose za ugao $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^0$.



ROTACIJA U PROSTORU

Rotacija oko *x*-ose, *y*-ose i *z*-ose za ugao $\alpha = \dfrac{\pi}{3} = 60^0$.



ROTACIJA U PROSTORU

Rotacijom oko *z*-ose menjaju se samo *x* i *y* koordinate, *z*-koordinata se ne menja. Preciznije, *z* se ne menja, a *x* i *y* koordinate se ponašaju kao u rotaciji u xy-ravni.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

R $\qquad$ R^{-1}

ROTACIJA U PROSTORU

Rotacija oko *z*-ose

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$
$$z' = z$$
$$1 = 1$$

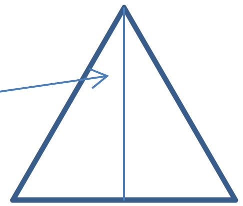
$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha$$
$$y = -x'\sin\alpha + y\cos\alpha$$
$$z = z'$$
$$1 = 1$$

ROTACIJA U PROSTORU - primer

Napisati matricu rotacije oko z-ose za ugao $\alpha = \dfrac{\pi}{6} = 30^0$

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} = 30^0$$



$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

ROTACIJA U PROSTORU - primer

Napisati matricu rotacije oko z-ose za ugao $\alpha = -\frac{\pi}{6}$

$$R_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_{\alpha}^{-1}$$

ROTACIJA U PROSTORU - primer

Napisati matricu rotacije oko z-ose za ugao $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^0$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ROTACIJA U PROSTORU

Rotacija oko *x*-ose

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a & 0 \\ 0 & \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$R \qquad R^{-1}$

$$x' = x \qquad x = x'$$

$$y' = y\cos\alpha - z\sin\alpha \qquad y = y'\cos\alpha + z'\sin\alpha$$

$$z' = y\sin\alpha + z\cos\alpha \qquad z = -y'\sin\alpha + z'\cos\alpha$$

$$1 = 1 \qquad 1 = 1$$

ROTACIJA U PROSTORU - primer

Napisati matricu rotacije oko x-ose za ugao $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^0$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ROTACIJA U PROSTORU

Objasniti razliku
U odnosu na
ostale ose

Rotacija oko *y*-ose

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & 0 & \sin a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin a & 0 & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & 0 & -\sin a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin a & 0 & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x\cos\alpha + z\sin\alpha \qquad x = x'\cos\alpha - z'\sin\alpha$$

$$y' = y \qquad y = y'$$

$$z' = -x\sin\alpha + z\cos\alpha \qquad z = x'\sin\alpha + z'\cos\alpha$$

$$1 = 1 \qquad 1 = 1$$

ROTACIJA U PROSTORU - primer

Napisati matricu rotacije oko y-ose za ugao $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^0$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

REFLEKSIJA

U odnosu na *xy*-ravan

$$R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\\1\end{bmatrix}$$

R $\quad R^{-1}$

$$x'=x$$
$$y'=y$$
$$z'=-z$$
$$1=1$$

$$x=x'$$
$$y=y'$$
$$z=-z'$$
$$1=1$$

REFLEKSIJA

U odnosu na *xz*-ravan

$$R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}$$

$$x'=x$$
$$y'=-y$$
$$z'=z$$
$$1=1$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\\1\end{bmatrix}$$

$$x=x'$$
$$y=-y'$$
$$z=z'$$
$$1=1$$

REFLEKSIJA

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

U odnosu na *yz*-ravan

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = -x$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$1 = 1$$

$$x = -x'$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$1 = 1$$

AFINE TRANSFORMACIJE

Translacija

Rotacija

Refleksija

Skaliranje

Smicanje

Kompozicija navedenih osnovnih afinih transformacija, u proizvoljnom poretku ili kompozicija nekih od njih je afina transformacija.

SKALIRANJE

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

p, q, r

- faktori skaliranja

p - u pravcu *x*-ose

q - u pravcu *y*-ose

r - u pravcu *z*-ose

$$x' = px$$
$$y' = qy$$
$$z' = rz$$
$$1 = 1$$

$$x = \frac{1}{p} x'$$
$$y = \frac{1}{q} y'$$
$$z = \frac{1}{r} x'$$
$$1 = 1$$

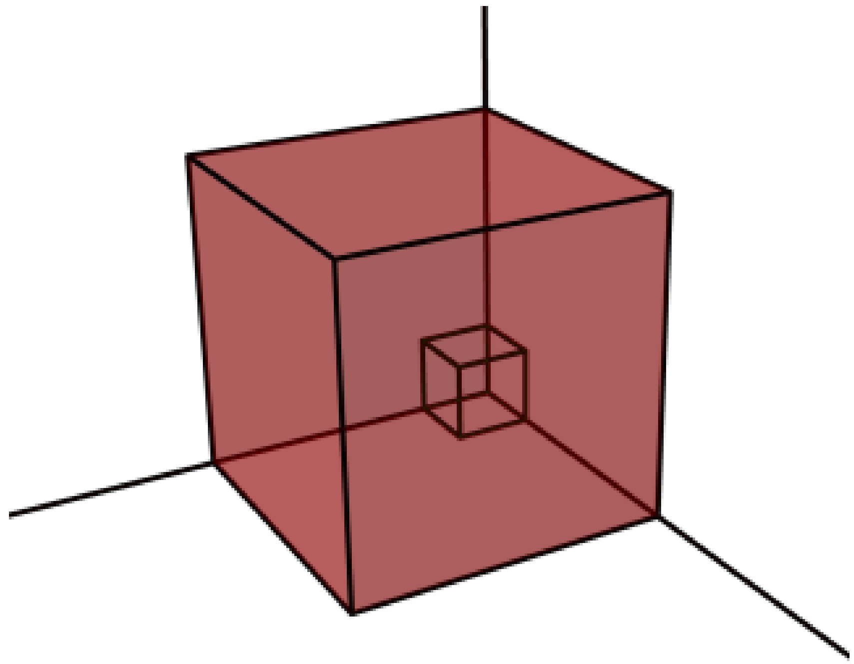
SKALIRANJE

$p = q = r$ Uniformno skaliranje Homotetija

Sličnost

$$p = 0.25$$
$$q = 0.25$$
$$r = 0.25$$

$$x' = px$$
$$y' = qy$$
$$z' = rz$$
$$1 = 1$$



SKALIRANJE

Homotetija

Uniformno skaliranje

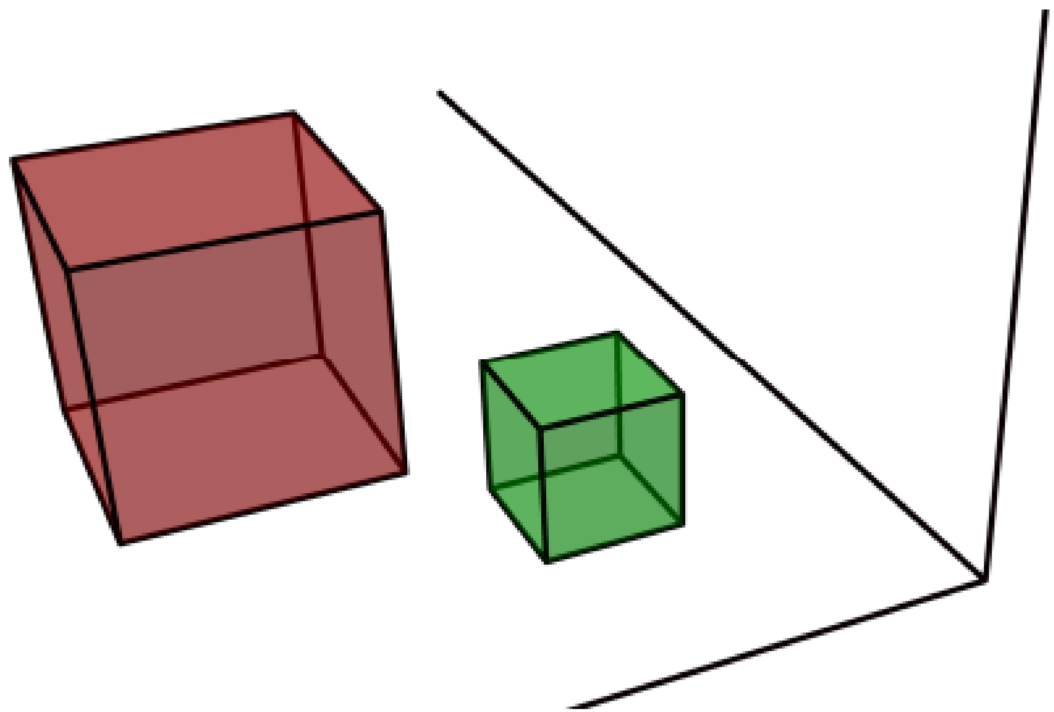
Sličnost

$$p = 0.5 \qquad x' = px$$

$$q = 0.5 \qquad y' = qy$$

$$r = 0.5 \qquad z' = rz$$

$$1 = 1$$



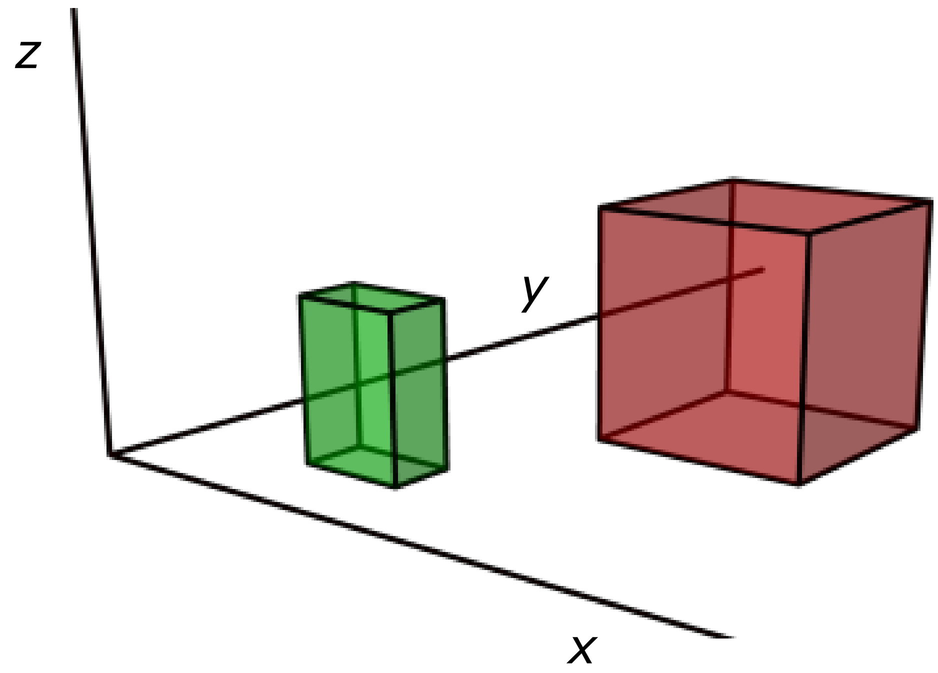
SKALIRANJE

Ukoliko faktori skaliranja po svim osama p, q, r nisu svi medjusobno jednaki, skaliranje je neuniformno.

Neuniformno skaliranje

$$p = 0.5 \qquad q = 0.3 \qquad r = 0.7$$

$$x' = px$$
$$y' = qy$$
$$z' = rz$$
$$1 = 1$$



SKALIRANJE

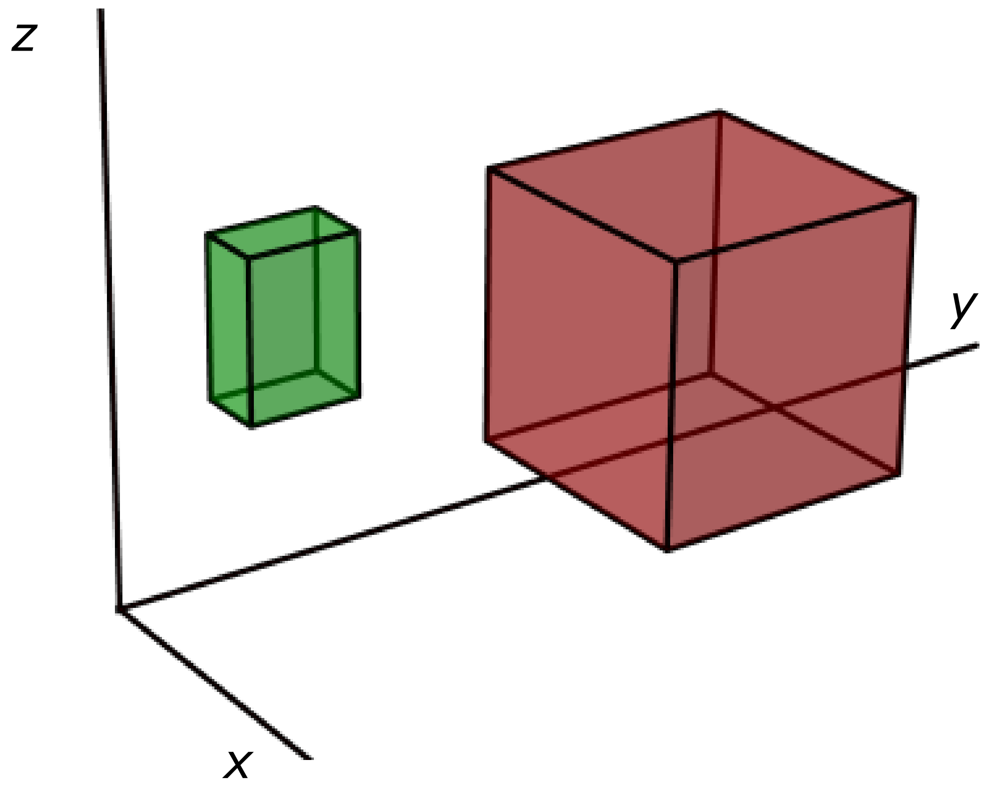
Neuniformno skaliranje

$$p = 0.5 \qquad x' = px$$

$$q = 0.3 \qquad y' = qy$$

$$r = 0.7 \qquad z' = rz$$

$$1 = 1$$



SKALIRANJE

Napisati matricu uniformnog skaliranja sa faktorom skaliranja 0.7 .

$$S = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SKALIRANJE

Napisati matricu skaliranja u pravcu x-ose sa faktorom skaliranja 0.5.

$$S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SKALIRANJE

Napisati matricu skaliranja u pravcu x-ose i pravcu y-ose sa faktorima skaliranja 0.6 i 0.8 rspektivno.

$$S = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1.67 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SKALIRANJE

Napisati matricu neuniformnog skaliranja sa faktorom skaliranja u odnosu na x-osu 0.7, u odnosu na y-osu 0.9, u odnosu na z-osu 0.6.

$$S=\begin{bmatrix}0.7 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.9 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

SMICANJE - Shear

U pravcu x- i y-ose

z-koordinata se ne menja

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + az$$
$$y' = y + bz$$
$$z' = z$$
$$1 = 1$$

$$x = x' - az$$
$$y = y' - bz$$
$$z = z'$$
$$1 = 1$$

SMICANJE - Shear

$$a \neq 0, \quad b = 0$$

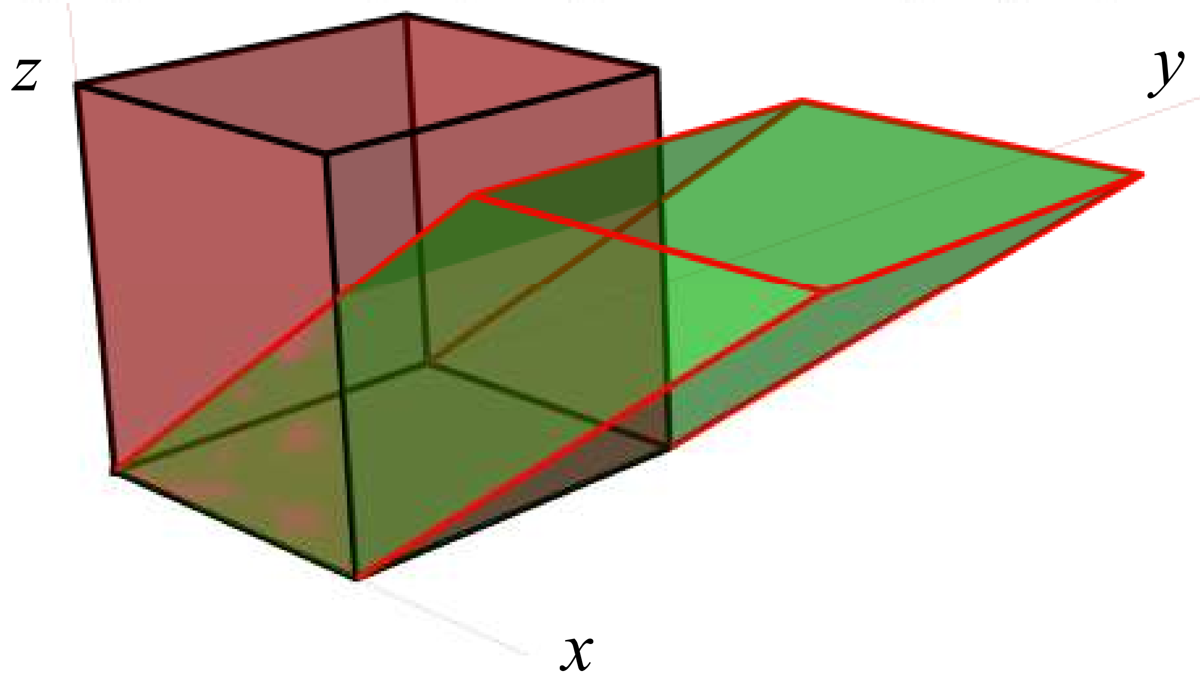
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + az$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$1 = 1$$



SMICANJE - Shear

$$a=0, \quad b\neq 0$$

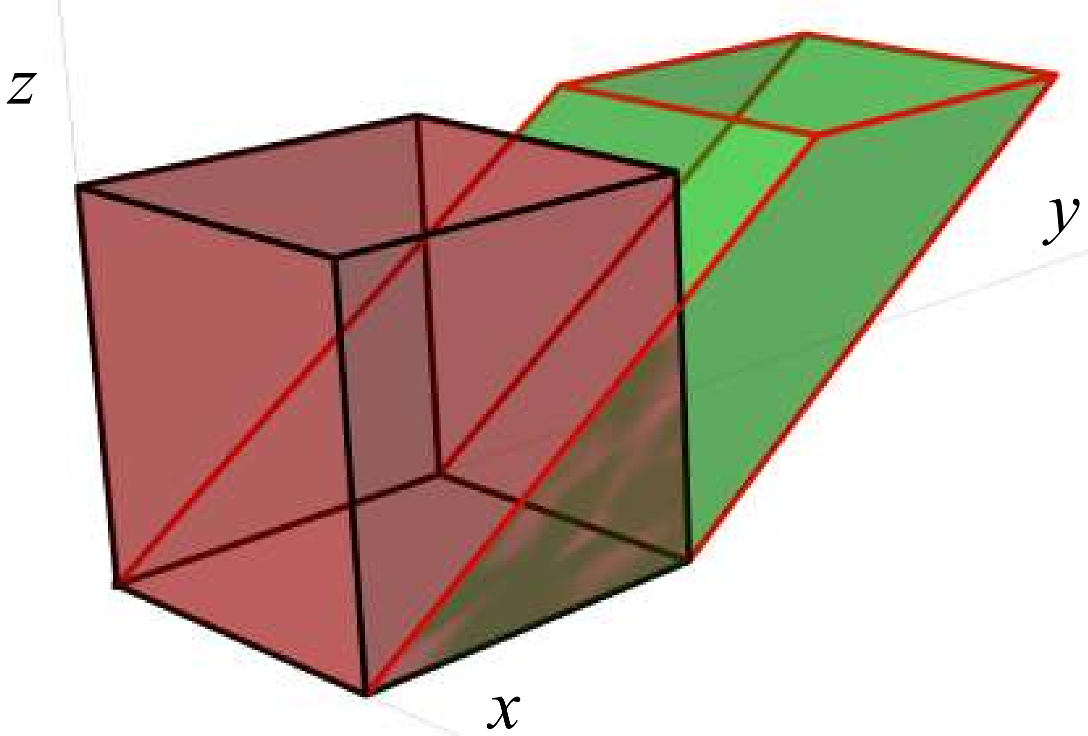
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x$$

$$y' = y + bz$$

$$z' = z$$

$$1 = 1$$



SMICANJE - Shear

$$a \neq 0, \quad b \neq 0$$

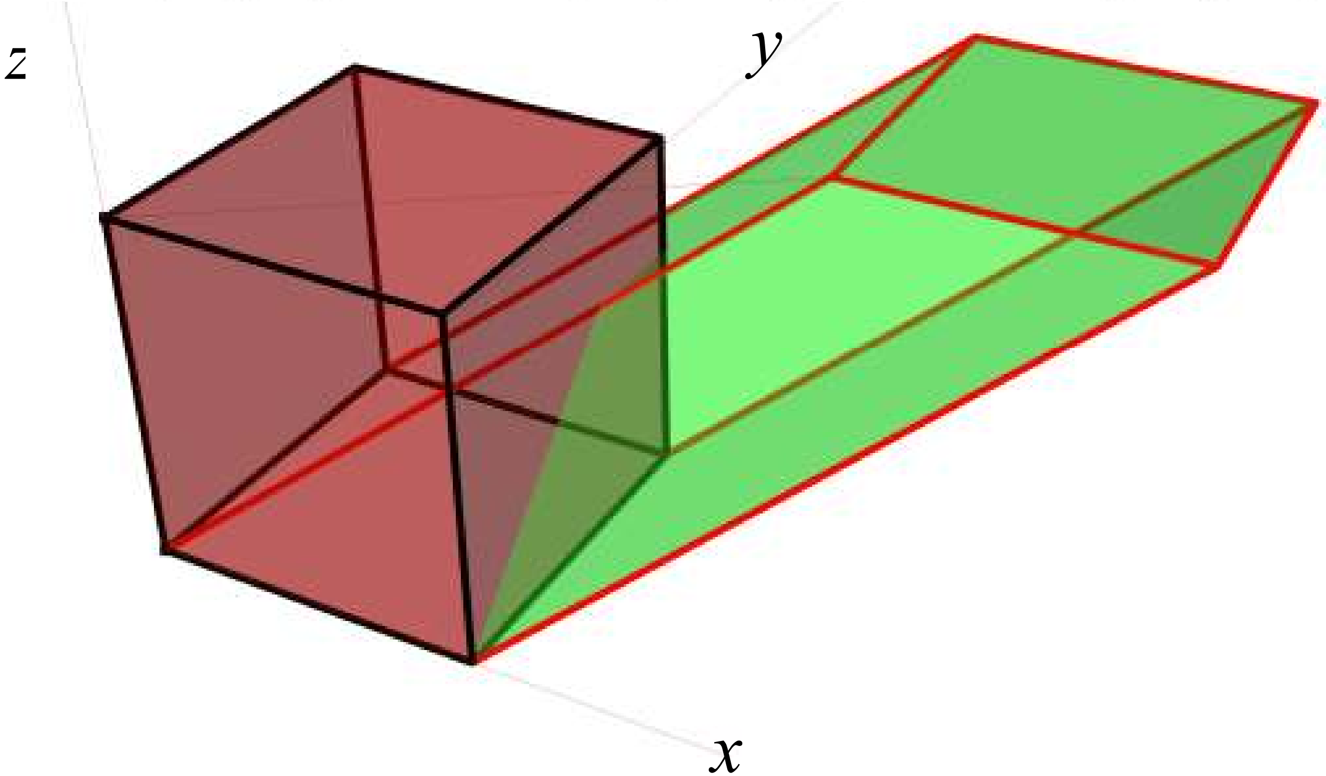
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + az$$

$$y' = y + bz$$

$$z' = z$$

$$1 = 1$$



SMICANJE - Shear

$$a \neq 0, \quad b \neq 0$$

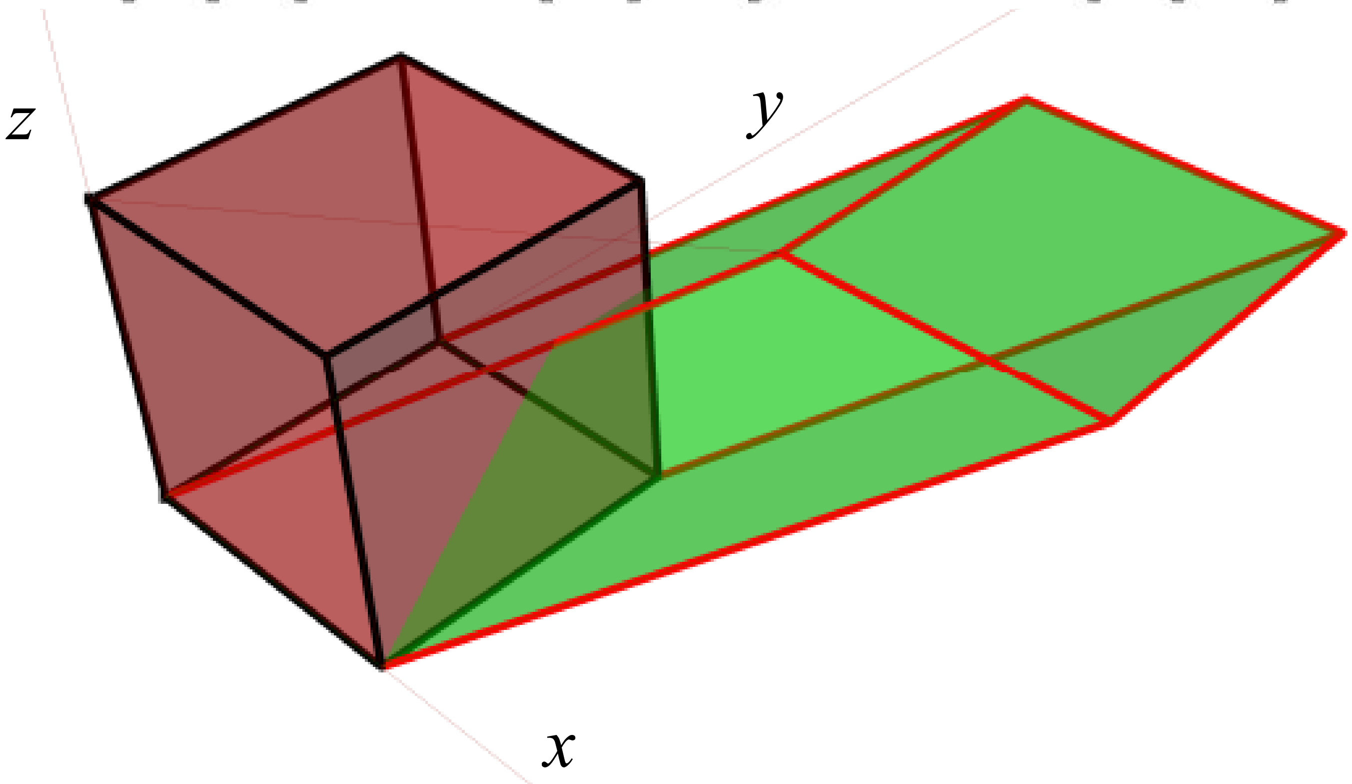
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + az$$

$$y' = y + bz$$

$$z' = z$$

$$1 = 1$$



SMICANJE - primer

Napisati matricu smicanja u x- i y- pravcu sa faktorom smicanja 3 i 4 respektivno.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SMICANJE - Shear

U pravcu x- i z-ose y-koordinata se ne menja

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + ay \qquad x = x' - ay$$

$$y' = y \qquad y = y'$$

$$z' = z + cy \qquad z = z' - cy$$

$$1 = 1 \qquad 1 = 1$$

SMICANJE - primer

Napisati matricu smicanja u x- i z- pravcu sa faktorom smicanja 3 i 4 respektivno.

$$S=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

SMICANJE - Shear

U pravcu y- i z-ose x-koordinata se ne menja

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x \qquad x = x'$$

$$y' = y + bx \qquad y = y' - bx$$

$$z' = z + cx \qquad z = z' - cx$$

$$1 = 1 \qquad 1 = 1$$

SMICANJE - primer

Napisati matricu smicanja u y- i z- pravcu sa faktorom smicanja 3 i 4 respektivno.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SMICANJE – u ravni

U pravcu x-ose

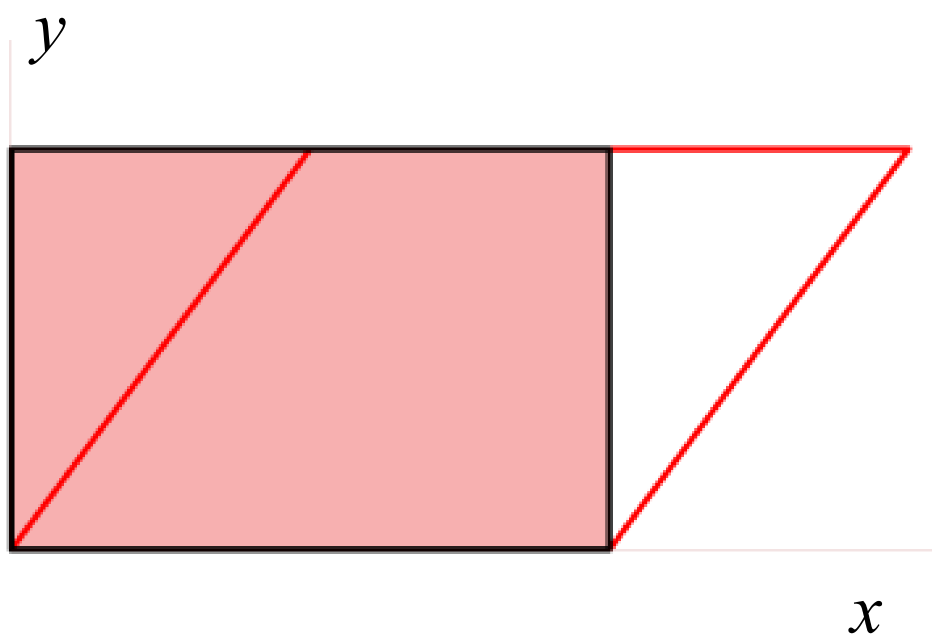
y-koordinata se ne menja

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + ay \qquad x = x' - ay$$

$$y' = y \qquad y = y'$$

$$1 = 1 \qquad 1 = 1$$



SMICANJE - primer

Napisati matricu smicanja u ravni u pravcu x-ose sa faktorom smicanja 2.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SMICANJE – u ravni

U pravcu y-ose

x-koordinata se ne menja

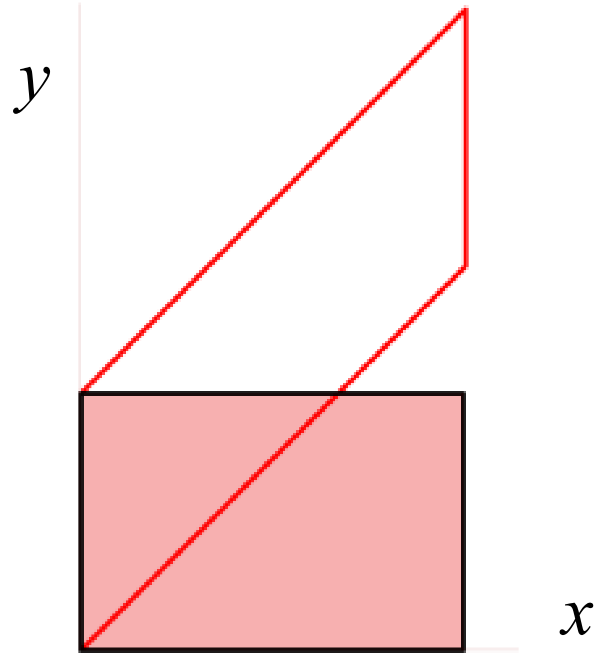
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x \qquad x = x'$$

$$y' = y + bx \qquad y = y' - bx$$

$$1 = 1 \qquad 1 = 1$$



SMICANJE - primer

Napisati matricu smicanja u ravni u pravcu y-ose sa faktorom smicanja 2.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AFINE TRANSFORMACIJE

Kompozicija geometrijskih transformacija je njihovo uzastopno izvođenje, svaka od transformacija dejstvuje na rezultat prethodne.

Ako su zadate matrice transformacija

$$A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_n$$

matrica kompozicije, izvodjenja transformacija u tom poretku je

$$A = A_n A_{n-1} \ldots A_2 A_1$$

AFINE TRANSFORMACIJE

U opštem slučaju, afine transformacije se mogu prikazati u obliku:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Opšti oblik matrice afine transformacije

Inverzna matrica –

Matrica inverzne transformacije

AFINE TRANSFORMACIJE

Afine transformacije u ravni održavaju kolinearnost i odnose rastojanja izmedju tačaka.

Afine transformacije u prostoru održavaju komplanarnost, kolinearnost i odnose rastojanja izmedju tačaka.

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

Primenjene su sledeće transformacija na neki objekat:

A 1. Skaliranje u pravcu x-ose koristeći faktor skaliranja 5

B 2. Potom, rotacija oko z-ose za 30^0 .

C 3. Zatim, smicanje u x- i y- pravcu sa faktorom smicanja 2 i 3 respektivno.

D 4. Na kraju, translacija za vektor (2,1,2).

Ukoliko su matrice skaliranja, rotacije, smicanja i translacije

A, B, C i D respektivno, matrica njihove kompozicije je H=DCBA.

$$H = DCBA \qquad H^{-1} = \left(DCBA\right)^{-1} = A^{-1}B^{-1}C^{-1}D^{-1}$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{DCBA} = \begin{bmatrix} 5\sqrt{3}/2 & -1/2 & 2 & 2 \\ 5/2 & \sqrt{3}/2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

Primenjene su sledeće transformacija na neku geometrijsku figuru u ravni:

1. Rotacija za ugao $\dfrac{\pi}{4}$
2. Potom, translacija za vektor $\vec{t} = (2,3)$

1) Napisati matrice rotacije i translacije

2) Izračunati matricu izvedene afine transformacije (kompozicije rotacije i translacije).

3) Izračunati matricu afine transformacije u slučaju da su rotacija i translacija izvedene u obrnutom poretku.

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

1)

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2)

$$K = T \cdot R$$

$$K = TR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

3)

$$R=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad L=R\cdot T$$

$$L=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

$$L = RT = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = RT = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

$$K = TR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = RT = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T \cdot R \neq R \cdot T$$

Kompozicija rotacije i translacije nije komutativna.

Bitan je redosled izvodjenja tih transformacija.

Primenjene su sledeće transformacija na neku geometrijsku figuru u ravni:

1. Skaliranje sa faktorom 0.8
2. Potom, translacije za vektor $\vec{t} = (2, 3)$

1) Napisati matrice skaliranja i translacije.

2) Izračunati matricu izvedene afine transformacije (kompozicije skaliranja i translacije).

3) Izračunati matricu afine transformacije u slučaju da su transformacije izvedene u obrnutom poretku.

$$S=\begin{bmatrix}0.8 & 0 & 0\\ 0 & 0.8 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$T\cdot S=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.8 & 0 & 0\\ 0 & 0.8 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8 & 0 & 2\\ 0 & 0.8 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$S\cdot T=\begin{bmatrix}0.8 & 0 & 0\\ 0 & 0.8 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8 & 0 & 0.8\cdot 2\\ 0 & 0.8 & 0.8\cdot 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8 & 0 & 1.6\\ 0 & 0.8 & 2.4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$T \cdot S = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 2 \\ 0 & 0.8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S \cdot T = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 1.6 \\ 0 & 0.8 & 2.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T \cdot S \neq S \cdot T$$

Kompozicija skaliranja i translacije nije komutativna.

Bitan je redosled izvodjenja tih transformacija.

Primenjene su sledeće transformacija na neku geometrijsku figuru u ravni:

1. Skaliranje sa faktorom 0.8
2. Potom, rotacija za ugao $\dfrac{\pi}{4}$

   1) Napisati matrice skaliranja i rotacije.

   2) Izračunati matricu izvedene afine transformacije (kompozicije skaliranja i rotacije).

   3) Izračunati matricu afine transformacije u slučaju da su transformacije izvedene u obrnutom poretku.

Primenjene su sledeće transformacija na neku geometrijsku figuru u ravni:

1. Skaliranje sa faktorom 0.8
2. Potom, rotacija za ugao $\dfrac{\pi}{4}$

1) Napisati matrice skaliranja i rotacije.

2) Izračunati matricu izvedene afine transformacije (kompozicije skaliranja i rotacije).

3) Izračunati matricu afine transformacije u slučaju da su transformacije izvedene u obrnutom poretku.

Primenjene su sledeće transformacija na neku geometrijsku figuru u ravni:

1. Skaliranje sa faktorom 0.8
2. Potom, rotacija za ugao $\dfrac{\pi}{4}$

1) Napisati matrice skaliranja i rotacije.

2) Izračunati matricu izvedene afine transformacije (kompozicije skaliranja i rotacije).

3) Izračunati matricu afine transformacije u slučaju da su transformacije izvedene u obrnutom poretku.

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R \cdot S = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & -0.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & 0.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S \cdot R = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot = \begin{bmatrix} 0.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & -0.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & 0.8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R \cdot S = S \cdot R$$

Medjutim, iz pojedinačnog primera, ne može se izvesti zaključak.

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R \cdot S = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p\cos\alpha & -q\sin\alpha & 0 \\ p\sin\alpha & q\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R \cdot S = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p\cos\alpha & -q\sin\alpha & 0 \\ p\sin\alpha & q\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S \cdot R = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p\cos\alpha & -p\sin\alpha & 0 \\ q\sin\alpha & q\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

U slučaju uniformnog skaliranja $q = p$

$$R \cdot S = S \cdot R = \begin{bmatrix} p\cos\alpha & -p\sin\alpha & 0 \\ p\sin\alpha & p\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R \cdot S = S \cdot R$$

U slučaju uniformnog skaliranja kompozicija skaliranja i rotacije je komutativna.

Nije bitan redosled izvodjenja transformacija.

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

Napisati matricu složene afine transformacije u prostoru u kojoj rotaciji oko x-ose za ugao α prethodi rotacija oko z-ose za isti taj ugao.

R_z

R_x

$$R = R_x \cdot R_z$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

$$R = R_x R_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

Primenjene su sledeće transformacija na neki objekat:

1. Uniformno skaliranje sa faktorom skaliranja 0.5

2. Potom, translacija za vektor (2,1,2).

1) Izračunati matricu afine transformacije, ukoliko se skaliranje i translacija izvode u tom poretku.

2) Izračunati matricu afine transformacije, ukoliko se skaliranje i translacija izvode u suprotnom poretku.

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

1)
$$S=\begin{bmatrix}0.5&0&0&0\\0&0.5&0&0\\0&0&0.5&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad T=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A=TS=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.5&0&0&0\\0&0.5&0&0\\0&0&0.5&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5&0&0&2\\0&0.5&0&1\\0&0&0.5&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

2)

$$S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = ST = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

Primenjene su sledeće transformacija na neku geometrijsku figuru u ravni:

1. Skaliranje u pravcu y-ose koristeći faktor skaliranja 0.2

2. Potom, translacija za vektor (2,3)

3. Na kraju, smicanje u pravcu x-ose sa faktorom smicanja 2 .

1) Izračunati matricu afine transformacije, ukoliko se skaliranje , translacija i smicanje izvode u tom poretku.

$$H = CBA$$

AFINE TRANSFORMACIJE - primer

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = CBA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = CBA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0.2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

***

Primenjene su sledeće transformacija na neku geometrijsku figuru u ravni:

1. Skaliranje sa faktorom 0.5
2. Potom, translacije za vektor $\vec{t} = (2,3)$

   1) Napisati matrice skaliranja i translacije.

   2) Izračunati matricu izvedene afine transformacije (kompozicije skaliranja i translacije u tom poretku).

   3) Izračunati matricu inverzne afine transformacije

$$S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = T \cdot S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 2 \\ 0 & 0.5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = (T \cdot S)^{-1} = S^{-1} T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

***

Primenjene su sledeće transformacija na neku geometrijsku figuru u ravni:

1. Skaliranje sa faktorom 0.2
2. Potom, rotacija za ugao $\dfrac{\pi}{2}$

1) Napisati matrice skaliranja i rotacije.

2) Izračunati matricu izvedene afine transformacije (kompozicije skaliranja i rotacije).

3) Izračunati inverznu matricu.

$$S = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = R \cdot S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \left(R \cdot S\right)^{-1} = S^{-1} R^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TRANSFORMACIJA KOORDINATNOG SISTEMA

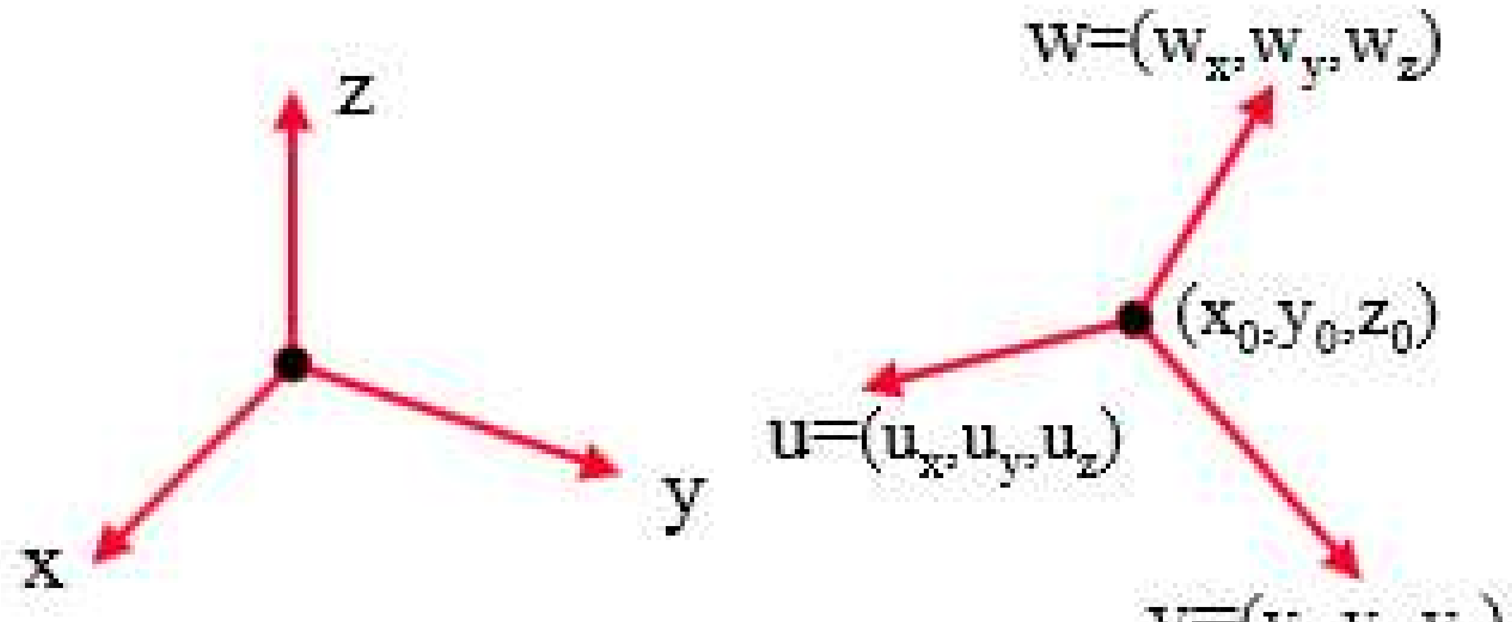
Opšti oblik afine transformacije:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

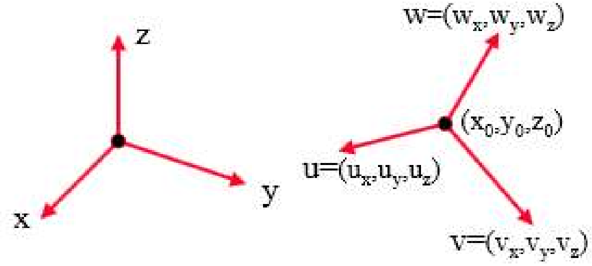
Matrica afine transformacije.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TRANSFORMACIJA KOORDINATNOG SISTEMA



TRANSFORMACIJA KOORDINATNOG SISTEMA



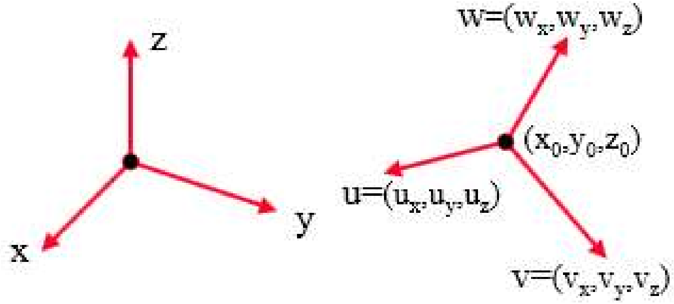
$$M=\begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

TRANSFORMACIJA KOORDINATNOG SISTEMA



$$M = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P • $\qquad$ • P'

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Koordinate tačke P u xzy-koordinatnom sistemu

Koordinate tačke P' u xyz-koordinatnom sistemu

Koordinate tačke P' u uvw-koordinatnom sistemu

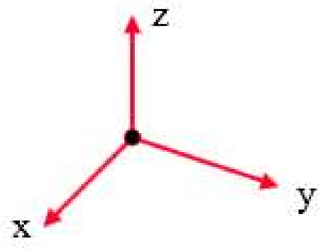
TRANSFORMACIJA KOORDINATNOG SISTEMA

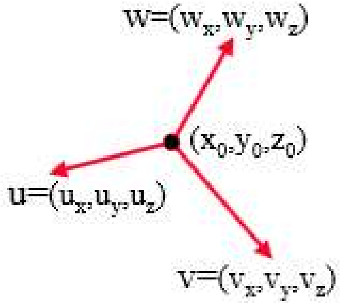
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Koordinate tačke P u globalnom koordinatnom sistemu

Koordinate tačke P' u globalnom koordinatnom sistemu

Koordinate tačke P' u lokalnom koordinatnom sistemu





P •

Globalni koordinatni sistem

• P'

Lokalni koordinatni sistem

TRANSFORMACIJA KOORDINATNOG SISTEMA